2

MATEMÁTICAS

EN MARCHA

SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

EDELVIVES

Teléfono: 1946-0620
Fax: 1946-0655
e-mail: ediciones_textos@editorialprogreso.com.mx
e-mail: servicioalcliente@editorialprogreso.com.mx

Dirección de Proyectos Educativos: Flavio Martín Pinaglia
Gerencia de Proyectos: Jessica López Meza
Asesoría tecnicopedagógica: Gisela Leticia Galicia
Revisión Técnica: Luis Manuel Cabrera Chim
Edición: Angélica Pérez Araiza
Gerencia de Producción, Diseño y Marketing: Luis Eduardo Valdespino Martínez
Coordinación de Diseño: Ruperto Hernández Gallegos
Diseño de portada: Luis Eduardo Valdespino Martínez
Diseño de interiores: Cecilia Madrigal Jaimes
Diagramación: Ricardo Pineda Carrillo
Ilustración: Enrique Márquez Flores, Alejandro Espinosa Mejía, Gustavo del Valle Sotelo
Fotografía: 123RF
Corrección: Rubén Cortez Aguila

En marcha.
Matemáticas, segundo grado de secundaria

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 232

ISBN: 978-607-746-665-9

Impreso en México
Printed in Mexico

1ª edición: 2018

Se terminó la impresión de esta obra en octubre de 2018
en los talleres de Editorial Progreso, S. A. de C. V.
Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06400, Ciudad de México.

Al alumno

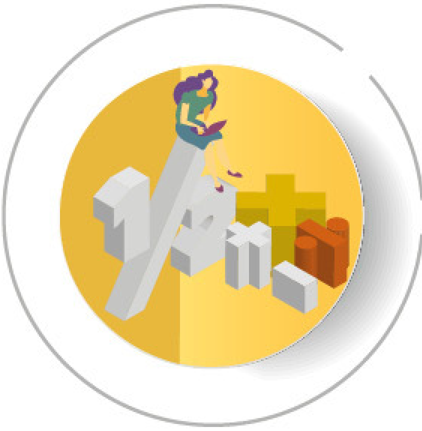
Continúas tu camino por la secundaria, ya transitaste por primer grado y no eres el mismo, pues tu vida académica y cotidiana se ha ido enriqueciendo y transformando. Lograste tener control de tus aprendizajes y, no sólo eso, también adquiriste herramientas y conocimientos que te permitirán acercarte y construir los nuevos aprendizajes de *Matemáticas* de segundo de secundaria.

Estás frente a un nuevo reto, pero no te preocupes, el libro que tienes en las manos te apoyará para que lo enfrentes y logres así un trayecto exitoso. A lo largo de tu libro, encontrarás actividades y conocimientos que te ayudarán a desarrollar habilidades matemáticas, por ejemplo, conocerás y distinguirás las fracciones y los decimales de los números enteros; aprenderás, también, la proporcionalidad directa e inversa; enfocarás tus habilidades en las funciones que te permitirán resolver problemas de variación lineal; trabajarás las equivalencias algebraicas con las geométricas mediante perímetros y áreas; analizarás y trazarás ángulos de polígonos regulares y efectuarás conversiones de medidas a otros sistemas.

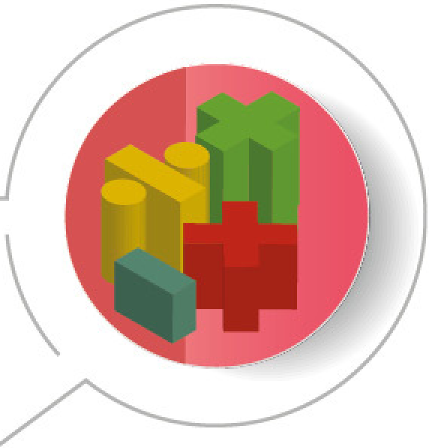
Finalmente, revisarás aspectos relacionados con los perímetros y áreas de polígonos regulares, así como problemas sobre el cálculo de volúmenes de prismas y cilindros, la lectura y análisis de tablas de datos, sin olvidar la construcción de las mismas y el cálculo de probabilidades sencillas para que analices algunos juegos de azar.

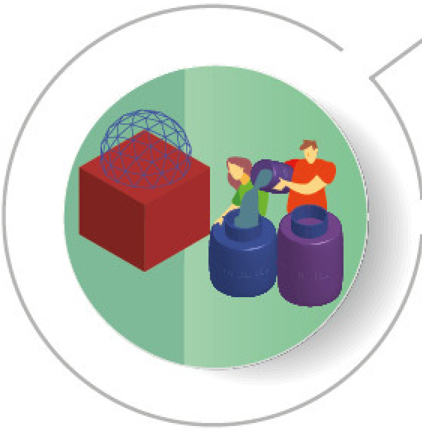
Estamos seguros que con el apoyo de tu docente, este será un grandioso viaje en el que tú eres el viajero principal, recuerda que no sólo eres el futuro del mundo, también eres su presente. Disfruta tu libro.

Los ejes de mi libro

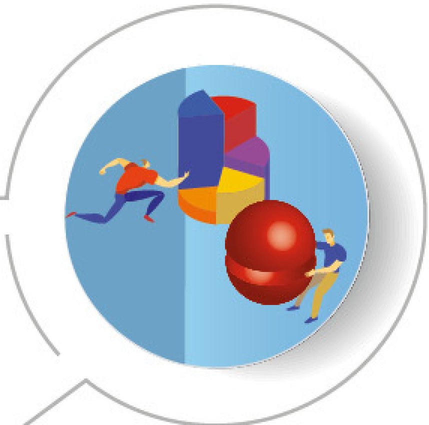


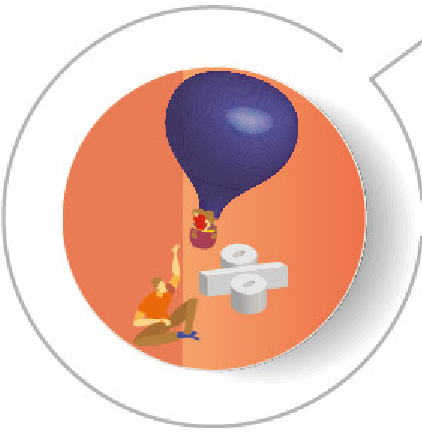
Número,
álgebra y variación



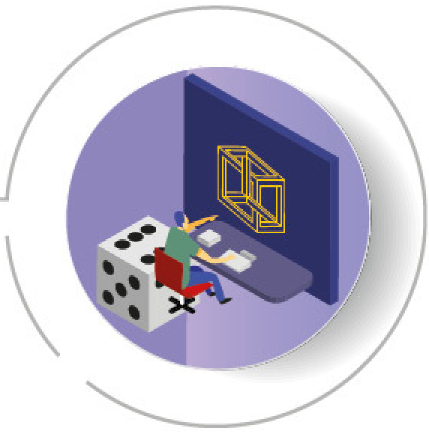


Forma,
espacio y medida





Análisis
y datos



Índice

Planifico mi ruta

Utiliza la siguiente agenda de trabajo para llevar un control de tu aprendizaje; en ella encontrarás el número y nombre de lección, las semanas y sesiones aproximadas para trabajar cada una y un espacio para que anotes las tareas importantes y las dudas que puedas tener para consultarlas con tu docente.

Número y nombre de Lección	Semanas de trabajo	Sesiones de trabajo	
1. Una parte de una parte	2	10	
2. Más por más y menos por menos	2	10	
3. ¿Qué tanto se reproduce la naturaleza?	2	10	
4. Mientras más seamos, menos tardamos	3	15	
5. Acertijo de dos números desconocidos	2	10	
Pasos firmes	1	5	
Las matemáticas a través del tiempo			
Valoro mi trayecto			
6. ¿Cómo cambian los cambios?	3	15	
7. Visto desde otra óptica	2	10	
8. Operaciones con letras	2	10	
9. Mosaicos con triángulos	3	15	
10. Correr un kilómetro o mil metros, ¡qué dilema!	3	15	
Pasos firmes	1	5	
Las matemáticas a través del tiempo			
Valoro mi trayecto			
11. ¿Cuánta pintura necesitamos?	2	10	
12. Quiero el vaso que tenga más agua	3	15	
13. ¿Qué nos dice la gráfica?	3	15	
14. Promedio, lo de en medio y lo más popular	3	15	
15. Le apuesto a ganar	2	10	
Pasos firmes	1	5	
Las matemáticas a través del tiempo			
Valoro mi trayecto			

	Tareas importantes	Dudas

¿Cómo es mi libro?

El libro de *Matemáticas* que tienes en tus manos, está elaborado con el fin de que sus contenidos, actividades y secciones te permitan desarrollar los Aprendizajes clave establecidos para este grado escolar. Gracias a sus contenidos aprenderás a construir tus propios aprendizajes y a enfrentar los retos que representan las matemáticas, no sólo en el ámbito escolar, también en tu vida cotidiana.

Tu libro está dividido en tres trimestres que incorporan quince lecciones, a través de las cuales irás construyendo tus aprendizajes.

Entrada de trimestre

En esta sección, gracias a una ilustración relacionada con los aprendizajes del trimestre y a un breve texto, te invitamos a acercarte a los nuevos aprendizajes.

Número de trimestre

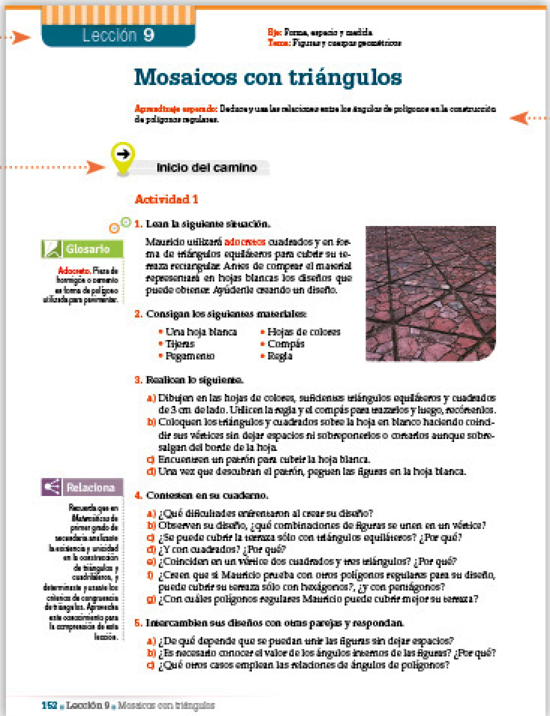
Breve párrafo introductorio en donde se explica lo que verás de manera general en cada trimestre.

Aquí podrás saber cuántas lecciones trabajarás, sus nombres, los temas que abordarás en cada una de ellas y los aprendizajes que debes lograr en el trimestre.

Número de lección

Aprendizaje esperado

Lo que aprenderás a lo largo de la lección.


Lección 9

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

Mosaicos con triángulos

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean la siguiente situación.

Mauricio utilizará adocretos cuadrados y en forma de triángulos equiláteros para cubrir su terraza rectangular. Antes de comprar el material representará en hojas blancas los diseños que puede obtener. Ayúdenle creando un diseño.

Glosario

Adocreto. Pieza de hormigón o cemento en forma de polígono utilizada para pavimentar.

2. Consigan los siguientes materiales:
- Una hoja blanca
- Tijeras
- Pegamento
- Hojas de colores
- Compás
- Regla

3. Realicen lo siguiente.

a) Dibujen en las hojas de colores, suficientes triángulos equiláteros y cuadrados de 3 cm de lado. Utilicen la regla y el compás para trazarlos y luego, recórtenlos.
b) Coloquen los triángulos y cuadrados sobre la hoja en blanco haciendo coincidir sus vértices sin dejar espacios ni sobreponerlos o cortarlos aunque sobresalgan del borde de la hoja.
c) Encuentren un patrón para cubrir la hoja blanca.
d) Una vez que descubran el patrón, peguen las figuras en la hoja blanca.

Relaciona

Recuerda que en Matemáticas de primer grado de secundaria analizaste la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determinaste y usaste los criterios de congruencia de triángulos. Aprovecha este conocimiento para la comprensión de esta lección.

4. Contesten en su cuaderno.

a) ¿Qué dificultades enfrentaron al crear su diseño?
b) Observen su diseño, ¿qué combinaciones de figuras se unen en un vértice?
c) ¿Se puede cubrir la terraza sólo con triángulos equiláteros? ¿Por qué?
d) ¿Y con cuadrados? ¿Por qué?
e) ¿Coinciden en un vértice dos cuadrados y tres triángulos? ¿Por qué?
f) ¿Creen que si Mauricio prueba con otros polígonos regulares para su diseño, puede cubrir su terraza sólo con hexágonos?, ¿y con pentágonos?
g) ¿Con cuáles polígonos regulares Mauricio puede cubrir mejor su terraza?

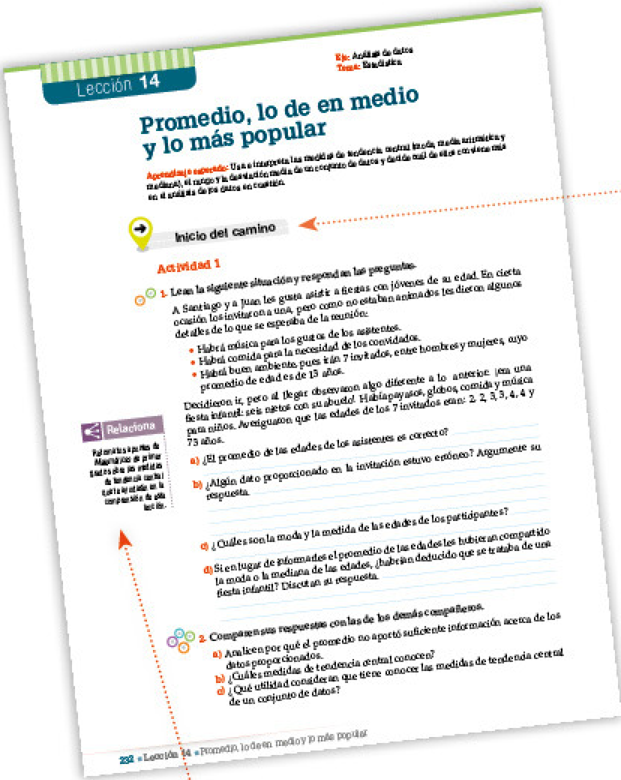
5. Intercambien sus diseños con otras parejas y respondan.

a) ¿De qué depende que se puedan unir las figuras sin dejar espacios?
b) ¿Es necesario conocer el valor de los ángulos internos de las figuras? ¿Por qué?
c) ¿Qué otros casos emplean las relaciones de ángulos de polígonos?

152 • Lección 9 • Mosaicos con triángulos

Inicio del camino

Realizarás actividades interesantes que te permitirán identificar qué tanto sabes y te darán la pauta para acceder a tus nuevos aprendizajes.


Lección 14

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

Promedio, lo de en medio y lo más popular

Aprendizaje esperado: Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean la siguiente situación y respondan las preguntas.

A Santiago y a Juan les gusta asistir a fiestas con jóvenes de su edad. En cierta ocasión los invitaron a una, pero como no estaban animados les dieron algunos detalles de lo que se esperaba de la reunión:
- Habrá música para los gustos de los asistentes.
- Habrá comida para la necesidad de los convidados.
- Habrá buen ambiente, pues irán 7 invitados, entre hombres y mujeres, cuyo promedio de edad es de 13 años.

Decidieron ir, pero al llegar observaron algo diferente a lo anterior: ¡era una fiesta infantil: seis nietos con su abuelo! Había payasos, globos, comida y música para niños. Averiguaron que las edades de los 7 invitados eran: 2, 2, 3, 3, 4, 4 y 73 años.

a) ¿El promedio de las edades de los asistentes es correcto?
b) ¿Algún dato proporcionado en la invitación estuvo erróneo? Argumente su respuesta.
c) ¿Cuáles son la moda y la mediana de las edades de los participantes?
d) Si en lugar de informarles el promedio de las edades les hubieran compartido la moda o la mediana de las edades, ¿habrían deducido que se trataba de una fiesta infantil? Discutan su respuesta.

Relaciona

2. Comparen sus respuestas con las de los demás compañeros.

a) Analicen por qué el promedio no aportó suficiente información acerca de los datos proporcionados.
b) ¿Cuáles medidas de tendencia central conocen?
c) ¿Qué utilidad consideran que tiene conocer las medidas de tendencia central de un conjunto de datos?

232 • Lección 14 • Promedio, lo de en medio y lo más popular

Ruta del saber

Aquí inicias el camino para construir tus aprendizajes. Te enfrentarás a retos y situaciones matemáticas relacionadas con tu vida cotidiana que te incitarán a la reflexión y al análisis para encontrar el mejor camino para enfrentar y resolverlos.

Relaciona

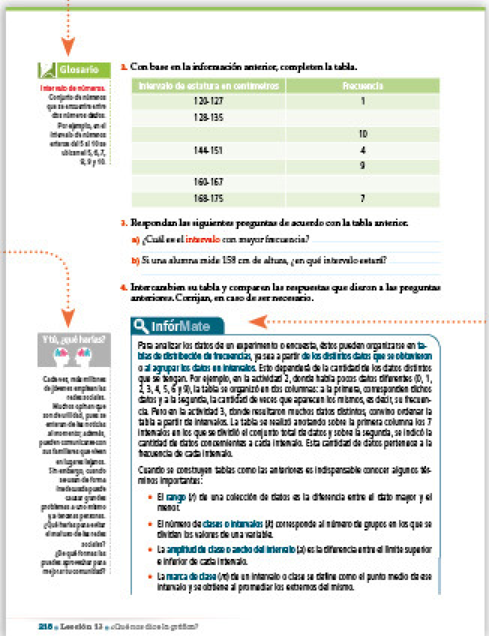
Esta sección te permitirá vincular los aprendizajes de la lección, con temas de otras asignaturas.

Glosario

Sección en donde encontrarás la definición de nuevas palabras o términos para que los conozcas y los apliques en tu lenguaje cotidiano.

Y tú, ¿qué harías?

En esta sección te acercarás a situaciones que te permitirán reflexionar y desarrollar tus habilidades socioemocionales.



InfórMate

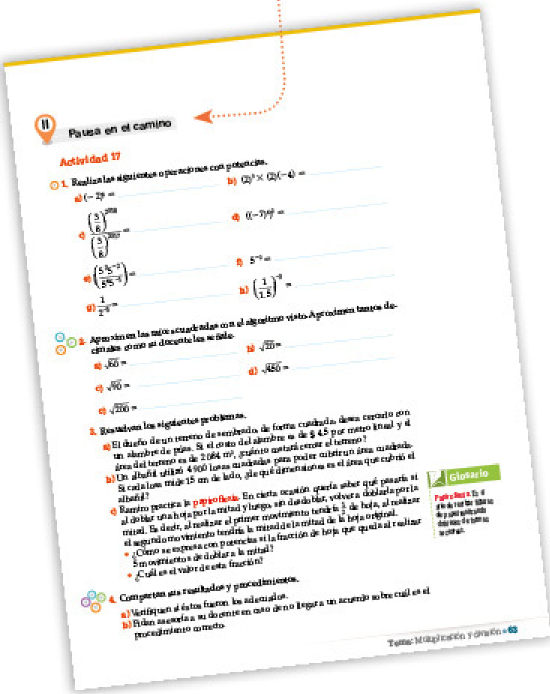
Encontrarás información y ejemplos que te permitirán contrastar y afinar tus estrategias para resolver situaciones matemáticas.

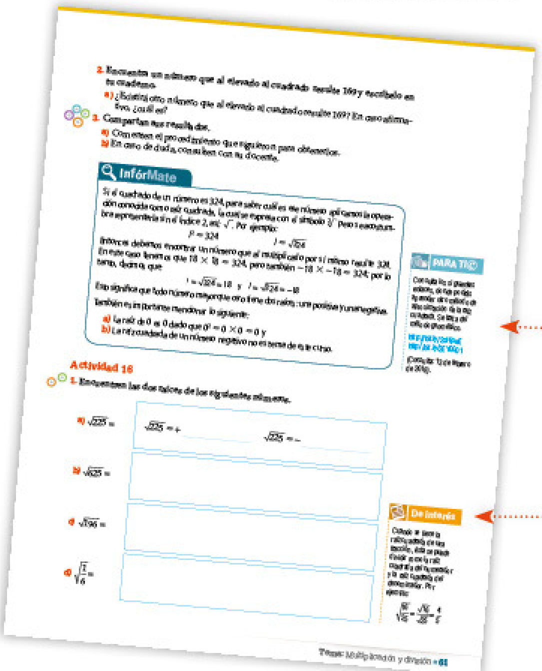
Para TIC

En esta sección encontrarás recomendaciones para el uso de herramientas digitales y tecnológicas; por ejemplo, cuando se requiera de un contexto explicativo más amplio o cuando se requiera el uso de programas de geometría dinámica o de cálculo. También se recomienda información para profundizar en los temas estudiados.

Pausa en el camino

Es el momento de concluir la lección y poner a prueba qué tanto aprendiste. Para ello te enfrentarás a retos de alto grado de dificultad que pondrán a prueba tus conocimientos matemáticos.





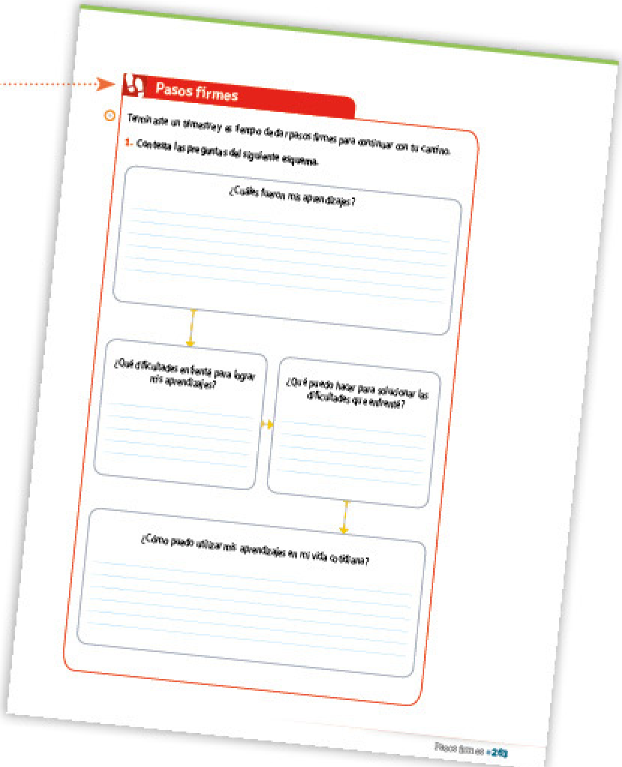
De interés

Te ofrecemos algunas recomendaciones de libros que encontrarás en tu Biblioteca Escolar y de Aula, así como información adicional que te ayudará a tener una mejor comprensión del contenido.

Al finalizar cada trimestre, encontrarás las siguientes secciones que te ayudarán a consolidar tus nuevos aprendizajes y dar paso a otros más para seguir tu camino.

Pasos firmes

En esta sección podrás identificar qué tanto aprendiste, a qué problemas te enfrentaste, cómo los resolviste y qué más te gustaría aprender.


Pasos firmes

Terminaste un trimestre y es tiempo de dar pasos firmes para continuar con tu camino.

1. Contesta las preguntas del siguiente esquema.

¿Cuáles fueron mis aprendizajes?

¿Qué dificultades enfrenté para lograr mis aprendizajes?

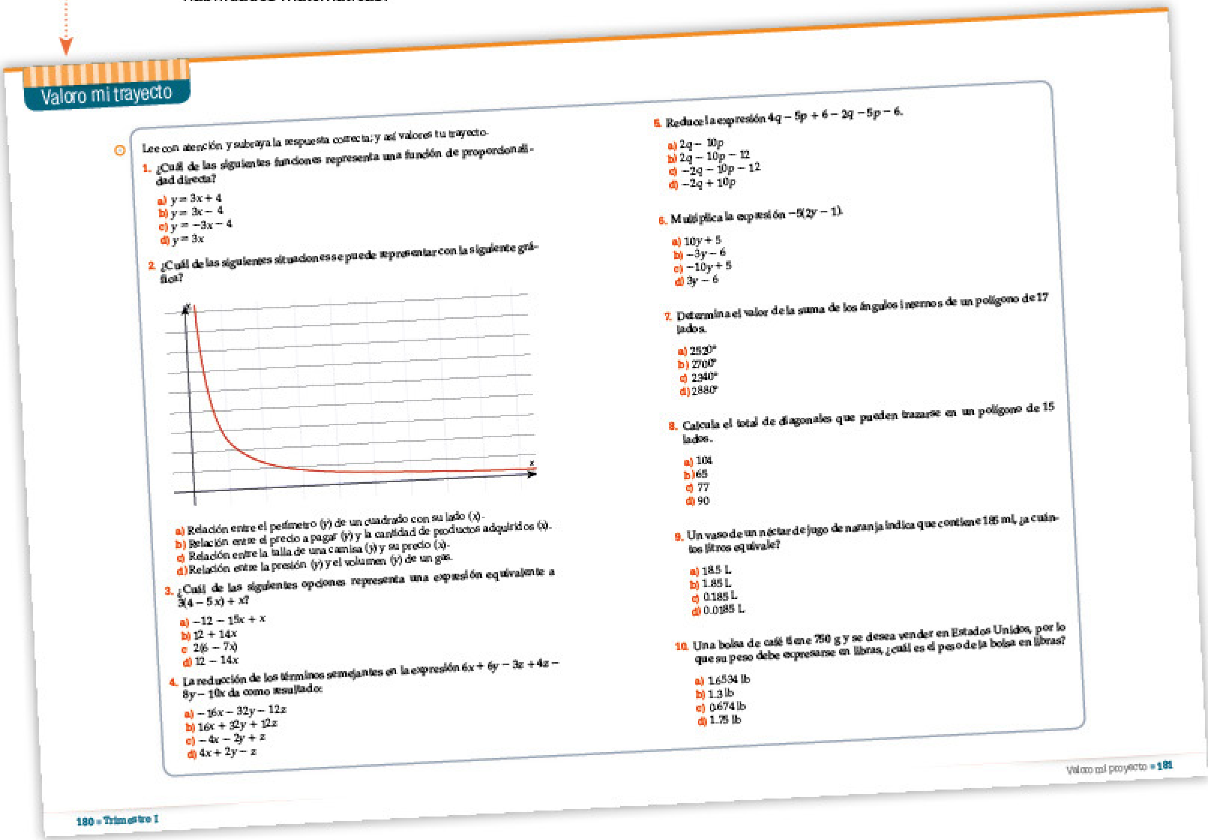
¿Qué puedo hacer para solucionar las dificultades que enfrenté?

¿Cómo puedo utilizar mis aprendizajes en mi vida cotidiana?

Pasos firmes • 263

Valoro mi trayecto

En esta sección harás un repaso de los aprendizajes más significativos del trimestre. Con ello afianzarás tus habilidades matemáticas.


Valoro mi trayecto

Lee con atención y subraya la respuesta correcta; y así valores tu trayecto.

1. ¿Cuál de las siguientes funciones representa una función de proporcionalidad directa?
   a) $y = 3x + 4$
   b) $y = 3x - 4$
   c) $y = -3x - 4$
   d) $y = 3x$
2. ¿Cuál de las siguientes situaciones se puede representar con la siguiente gráfica?
   a) Relación entre el perímetro (y) de un cuadrado con su lado (x).
   b) Relación entre el precio a pagar (y) y la cantidad de productos adquiridos (x).
   c) Relación entre la talla de una camisa (x) y su precio (y).
   d) Relación entre la presión (y) y el volumen (y) de un gas.
3. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una expresión equivalente a $3(4 - 5x) + x$?
   a) $-12 - 15x + x$
   b) $12 + 14x$
   c) $2(6 - 7x)$
   d) $12 - 14x$
4. La reducción de los términos semejantes en la expresión $6x + 6y - 3z + 4z - 8y - 10x$ da como resultado:
   a) $-16x - 32y - 12z$
   b) $16x + 32y + 12z$
   c) $-4x - 2y + z$
   d) $4x + 2y - z$
5. Reduce la expresión $4q - 5p + 6 - 2q - 5p - 6$.
   a) $2q - 10p$
   b) $2q - 10p - 12$
   c) $-2q - 10p - 12$
   d) $-2q + 10p$
6. Multiplica la expresión $-5(2y - 1)$.
   a) $10y + 5$
   b) $-3y - 6$
   c) $-10y + 5$
   d) $3y - 6$
7. Determina el valor de la suma de los ángulos internos de un polígono de 17 lados.
   a) 2520°
   b) 2700°
   c) 2340°
   d) 2880°
8. Calcula el total de diagonales que pueden trazarse en un polígono de 15 lados.
   a) 104
   b) 65
   c) 77
   d) 90
9. Un vaso de un néctar de jugo de naranja indica que contiene 185 ml, ¿a cuántos litros equivale?
   a) 18.5 L
   b) 1.85 L
   c) 0.185 L
   d) 0.0185 L
10. Una bolsa de café tiene 750 g y se desea vender en Estados Unidos, por lo que su peso debe expresarse en libras, ¿cuál es el peso de la bolsa en libras?
    a) 1.6534 lb
    b) 1.3 lb
    c) 0.674 lb
    d) 1.75 lb

180 • Trimestre 1

Valoro mi trayecto • 181

Las matemáticas a través del tiempo

¿Te imaginas los secretos que guarda la historia en el tiempo? Pues esta sección te permitirá conocer la historia de algunos conceptos clave que han marcado el rumbo de las matemáticas y que actualmente sigues utilizando.

Imágenes que marcan momentos importantes de la historia de las matemáticas.

Datos curiosos y relevantes sobre ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia.

Preguntas de reflexión que te permitirán comprender la importancia de las matemáticas a lo largo de la historia.

Modalidades de trabajo

A lo largo de las actividades de tu libro, te proponemos cuatro distintas modalidades de trabajo representadas de la siguiente manera:

Actividad individual

Actividad 1

1. Resuelve el problema basándote en los conocimientos que tienes de sucesiones numéricas.

Actividad por parejas

Actividad 2

1. Resuelvan los problemas. Primero hagan conjeturas acerca de la que creen que es la respuesta correcta y expongan las razones de su elección.

Actividad equipo

Actividad 3

1. Efectúen el siguiente experimento aleatorio.

Tiren 150 veces dos dados al mismo tiempo, observen las caras que quedan hacia arriba y sumen los resultados.

Actividad grupal

Actividad 4

1. Hagan los siguientes experimentos.

a) Escriban los nombres de todos los compañeros del grupo en tarjetas, así como sus edades, colóquenlas en una bolsa o caja y saquen 200 veces una tarjeta (devuélvanla cada vez).

Trimestre I

Ejes

- Número, álgebra y variación

Temas

- Multiplicación y división
- Proporcionalidad
- Ecuaciones

LECCIÓN 1

Una parte de una parte

Tema Multiplicación y división

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

LECCIÓN 2

Más por más y menos por menos

Tema Multiplicación y división

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

LECCIÓN 3

¿Qué tanto se reproduce la naturaleza?

Tema Multiplicación y división

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

Las matemáticas siempre están presentes a nuestro alrededor y es imposible evadirlas. Por ello, en este trimestre aprenderás a usar algunas herramientas que te serán de utilidad. Las situaciones que aquí comprenderás están relacionadas con el uso de las fracciones y los decimales de números enteros, así como de las potencias para realizar cálculos más eficaces; también aprenderás la proporcionalidad directa e inversa para determinar la cantidad de tiempo que te tomaría concluir una obra y terminarás realizando un estudio más claro acerca de las ecuaciones y su uso.

LECCIÓN 4

Mientras más seamos, menos tardamos

Tema Proporcionalidad

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

LECCIÓN 5

Acertijo de dos números desconocidos

Tema Ecuaciones

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

Una parte de una parte

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean la siguiente situación.**

   Julián debe pintar una barda rectangular de una casa habitación. El primer día pintó $\frac{3}{4}$ del total pues se le acabó la pintura; al día siguiente pintó $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba justo cuando empezó a llover y no pudo terminar su trabajo.

2. **Hagan un dibujo en su cuaderno en el que muestren el área pintada y la que falta por pintar.**

3. **Hallen lo siguiente. Hagan sus operaciones en los espacios.**

   a) La fracción del total que ha pintado Julian en esos dos días.

   b) La fracción que le falta pintar.

   c) Si el área a pintar es de 80 m^2, ¿cuántos metros cuadrados le hizo falta pintar?

4. **Comenten sus respuestas, ¿qué procedimiento utilizaron para hallarlas?**

5. **Subrayen las operaciones que utilizaron y comenten en qué parte del proceso lo hicieron.**

   a) Suma. b) Resta. c) Multiplicación. d) División.

6. **Compartan sus respuestas y verifiquen si todos eligieron las mismas operaciones y por qué.**

   a) Tomen en consideración aquellas que hayan utilizado en grados anteriores de matemáticas.

Ruta del saber

Fracciones y decimales positivos

Actividad 2

1. **Lee la situación.**

   Una receta de un platillo pide $1\frac{1}{2}$ kg de nueces. Marco, al comprar las nueces observa que la báscula digital de la tienda marca 1.500 kg.

2. **Responde.**

   a) ¿Lo que marca la báscula digital es la cantidad que Marco debe comprar? Justifica tu respuesta. ______________________________

   ____

3. **Comparen su respuesta.**

   a) ¿Cómo la obtuvieron?
   b) Discutan sobre cómo pasar la fracción $1\frac{1}{2}$ a decimales.
   c) Presenten a su docente la forma en que lo realizaron.

4. **Lean lo siguiente y discutan con asesoría de su docente.**

   Marco observó que algunas cantidades vienen dadas en decimales y otras en fracciones. Por ejemplo notó que un envase de jugo indicaba un contenido de 2.5 litros y otro señalaba $1\frac{1}{2}$ de litro. Regresó a casa pensando cómo hallar la fracción equivalente a un número decimal.

   a) Escriban en su cuaderno un método para convertir un número decimal en una fracción.

Actividad 3

1. **Utilicen el método para convertir números decimales en fracciones, escrito en la actividad anterior, para hallar las fracciones equivalentes a los números decimales siguientes.**

   a) $0.5 = \frac{5}{\square}$ b) $0.45 = \frac{\square}{100}$ c) $0.007 = \frac{\square}{\square}$

   d) $0.2018 = \frac{\square}{\square}$ e) $2.15 = \frac{\square}{\square}$ f) $5.5 = \frac{\square}{\square}$

2. **Acuerden el proceso para pasar un número decimal a uno fraccionario.**

   a) Verifiquen mediante ejemplos que este proceso funciona mediante unos ejemplos propuestos.

Relaciona

En el curso anterior de *Matemáticas* aprendiste cómo realizar las operaciones de multiplicación de números fraccionarios y decimales, y las empleaste para resolver problemas. Ahora, aprenderás cómo se efectúa la división de fracciones y resolverás problemas que implican la combinación de multiplicaciones y divisiones y de fracciones y decimales.

Actividad 4

1. Completen en cada caso.

a) $0.18 = \frac{1}{10} + \frac{\square}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{\square} = \frac{\square}{50}$

b) $0.653 = \frac{6}{\square} + \frac{\square}{100} + \frac{3}{\square} = \frac{\square}{5} + \frac{1}{\square} + \frac{\square}{1\,000} = \frac{653}{\square}$

c) $0.45 = \frac{4}{\square} + \frac{\square}{100} = \frac{\square}{5} + \frac{1}{\square} = \frac{\square}{20}$

2. Compartan el resultado y procedimiento que utilizaron en las fracciones anteriores y comenten:

a) ¿Todos obtuvieron las mismas respuestas?
b) En caso de obtener respuestas distintas, ¿a qué se debió?, ¿cuál fue el paso que se les complicó?

3. Resuman, con ayuda del docente, el método para determinar la forma fraccionaria de un decimal.

Actividad 5

1. Convierte cada una de las fracciones a decimales.

a) $\frac{3}{4} = \square$

b) $\frac{6}{15} = \square$

c) $\frac{7}{8} = \square$

d) $\frac{17}{50} = \square$

e) $\frac{13}{4} = \square$

f) $\frac{32}{25} = \square$

g) $\frac{8}{10} = \square$

h) $\frac{2\,018}{2\,000} = \square$

Relaciona

En la asignatura de *Lengua Materna. Español*, primer grado, estudiaste cómo se elaboran resúmenes, esquemas y fichas de trabajo de textos que provengan de fuentes confiables. Ten en consideración esto porque lo utilizarás en diversas asignaturas, incluyendo *Matemáticas*.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, de manera que puedan distinguir los posibles errores.

a) Muestren su método para convertir las fracciones a decimales.
b) Si alguno de sus compañeros tiene dudas auxílienlo.

Multiplicación y división de fracciones

Actividad 6

1. **Resuelvan los siguientes problemas.**

   a) Damián quiere determinar cuánto pagará por $\frac{3}{4}$ de kilogramo de carne molida sabiendo que el kilogramo cuesta 160 pesos. Joel, uno de sus compañeros, le dice que para determinar el costo debe dividir 3 entre 4 y el resultado multiplicarlo por 160. Sin embargo, Pedro, un segundo compañero, le comenta que debe dividir 160 entre 4 y luego multiplicarlo por 3.

   - Analicen los procedimientos y determinen quién tiene razón, ¿Joel o Pedro? Argumenten su respuesta.

   b) Miguel compró 5 latas de $1\frac{1}{2}$ litros de pintura negra cada una, ¿cuántos litros de pintura tiene? Utiliza el siguiente espacio para realizar tus operaciones.

   c) Noé tenía una lata de pintura con $\frac{3}{4}$ de litro. Si por descuido se derramó $\frac{1}{3}$ de su contenido, ¿que fracción de la capacidad total quedó en la lata? Utiliza el siguiente espacio para realizar tus operaciones.

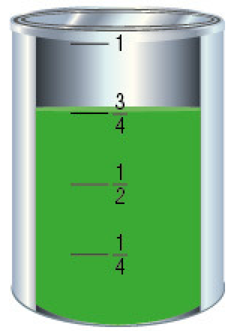


Imagen 1.1 Lata con $\frac{3}{4}$ l de pintura.

   d) Manuel compró una barra de plastilina para un trabajo manual. Cortó la barra en seis partes iguales y usó una. Los pedazos restantes los volvió a unir y los guardó. Posteriormente su hermanita usa $\frac{1}{4}$ de la plastilina que quedaba. ¿Qué fracción de la barra de plastilina sobra?

   e) Maritza compró una lata de 1.5 litros de pintura azul. Si empleó $\frac{1}{2}$ del contenido de esa lata para pintar un mural, ¿cuántos litros de pintura azul usó en éste? Utiliza el siguiente espacio para realizar tus operaciones.

2. **Comenten sus respuestas y procedimientos empleados en los problemas anteriores y determinen las respuestas correctas.**

Relaciona

En tu curso anterior de *Matemáticas*, analizaste cómo convertir una fracción a número decimal y a fracción, así como el significado de fracciones equivalentes.

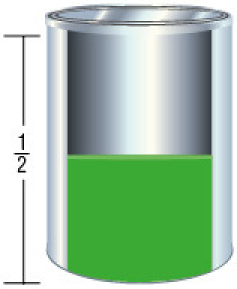
Te sugerimos retomar este aprendizaje ya que lo abordarás para el desarrollo de esta lección.

Actividad 7

1. **Lee la siguiente situación.**

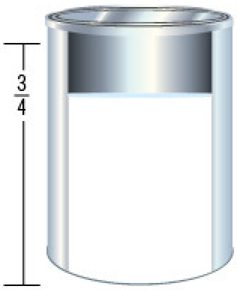
   a) Maritza invitó a varios de sus compañeros a pintar un mural; para hacer los dibujos repartió entre ellos la pintura que tenía de la siguiente manera:

   - $\frac{1}{2}$ litro de pintura verde entre cuatro de sus compañeros.
   - $\frac{3}{4}$ de litro de pintura blanca entre tres de sus compañeros.
   - $\frac{2}{3}$ de litro de pintura azul entre cuatro de sus compañeros.

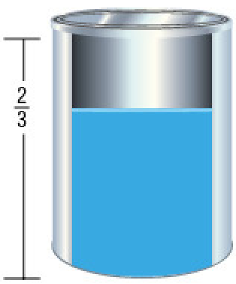


2. **Realiza las siguientes operaciones con base en la situación anterior y anota tus resultados en la tabla.**

   a) Divide la cantidad de pintura verde en cuatro partes iguales.



   b) Divide la cantidad de pintura blanca en tres partes iguales.



   c) Divide la cantidad de pintura azul en cuatro partes iguales.

Pintura verde	Pintura blanca	Pintura azul

3. Respondan ahora las siguientes preguntas.

a) ¿Qué fracción de pintura verde le tocó a cada compañero? ______

b) ¿Qué fracción de pintura blanca le tocó a cada compañero? ______

c) ¿Qué fracción de pintura azul le tocó a cada compañero? ______

4. Argumenten qué procedimiento y operaciones consideran necesaria para dividir una fracción entre un número natural.

a) Si sus respuestas no coinciden, acuerden cuál consideran el procedimiento más adecuado para obtener un resultado correcto.
b) En caso de duda, consulten a su docente.

Actividad 8

1. Lee la siguiente situación.

Maritza pintó un mural de un paisaje. Fue tanto el éxito que le pidieron que lo replicara en otra área.

La réplica tuvo dimensiones de 4 m de largo y 3 m de alto y es exactamente 4 veces más grande que el original.

2. Analicen lo siguiente y respondan.

a) Para saber las dimensiones del mural original de Maritza dos compañeros dan sus sugerencias:

Luis indica que se debe dividir cada una de las dimensiones del nuevo mural entre 4, pues este mural actual es 4 veces mayor.

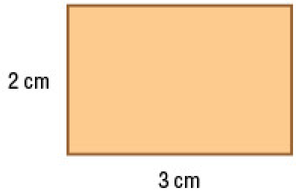
Angélica señala que se debe multiplicar cada una de las dimensiones de este nuevo mural por $\frac{1}{4}$.

- ¿Cuál de los dos tiene la razón? Justifiquen. ______

- ¿Se obtienen los mismos resultados con los métodos de Luis y Angélica?, ¿por qué? ______

b) ¿Cuáles son las dimensiones del mural original? ______

3. Observen las medidas del siguiente rectángulo, el cual representa las dimensiones de un nuevo mural que Maritza acaba de pintar.



De interés

Las matemáticas se han utilizado a lo largo de la historia y, actualmente, se pueden aplicar en diversas áreas de tu vida cotidiana. Te recomendamos el siguiente libro de tu Biblioteca Escolar y de Aula, en donde encontrarás diversos datos sobre estas aplicaciones.

Potter, Lawrence, *A jugar con las matemáticas*, México, SEP: Editorial Hiperlibro, Ediciones Robinbook, 2015 (Espejo de Urania).

4. **Respondan las preguntas en su cuaderno.**

a) Si este mural también se replicará en un espacio que es el triple del original. ¿qué medidas tendrá? ¿Por qué?
b) Si en otro momento se quiere que el mural tenga la mitad de tamaño del original, ¿qué medidas tendrá? ¿Qué operaciones realizaron para llegar a su respuesta?

5. **Comparen sus respuestas para determinar cuáles son correctas y consideren lo siguiente.**

a) Reflexionen sobre las operaciones que emplearon para obtener sus respuestas.
b) Discutan si las siguientes operaciones producen resultados iguales y el porqué de esto.

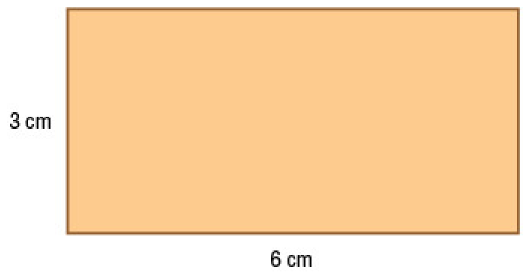
$$20 \div 5 \text{ y } 20 \times \frac{1}{5}$$

c) ¿Una división siempre se puede expresar como una multiplicación?
d) ¿Una multiplicación siempre se puede expresar como una división? Argumenten y lleguen a un consenso con ayuda de su docente.

Actividad 9

1. **Lean la situación y respondan en su cuaderno.**

Las dimensiones del siguiente rectángulo son $\frac{2}{3}$ de veces el rectángulo original.



a) ¿Las medidas del rectángulo original son menores o mayores que las del rectángulo que se presenta? ¿Por qué?
b) ¿Qué operaciones se deben hacer para calcular las medidas del rectángulo original?

2. **Contesten lo que se pide en cada inciso para ayudar a Alejandra a calcular las dimensiones del rectángulo original que se mencionan en la situación anterior.**

a) Alejandra nombra los lados del rectángulo original como:
a: el valor del largo del rectángulo.

b: el valor del ancho del rectángulo.

Ella indica que para obtener las medidas del rectángulo que se presenta, se debieron realizar las siguientes operaciones:

$$a \times \frac{2}{3} = 6 \text{ y } b \times \frac{2}{3} = 3$$

¿Son correctas estas operaciones? ______________________

PARA TIC

Ingresa a la siguiente dirección electrónica; en ella encontrarás información complementaria acerca de las operaciones con fracciones:

http://bit.ly/2DDDN6C

(Consulta: 22 de enero de 2018).

b) Con base en lo anterior, ¿qué operaciones deben realizarse para obtener los valores de *a* y *b*? Escribe esas operaciones.

$a =$ ______________________ $b =$ ______________________

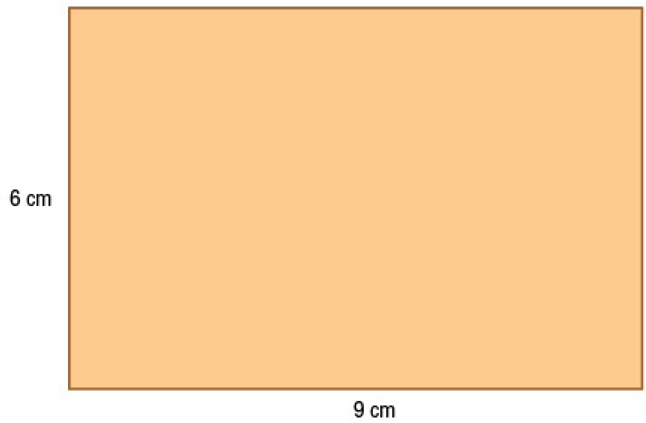
c) En la actividad anterior analizaron que una división se puede expresar como una multiplicación o que una división se puede expresar como una multiplicación, ¿cómo expresarían las operaciones que escribieron en el inciso b) como una multiplicación?

$a =$ ______________________ $b =$ ______________________

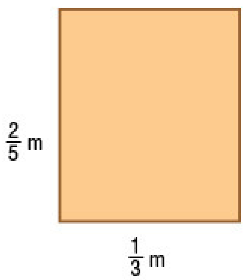
d) Entonces, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo original?

3. Lean lo siguiente y respondan.

Las dimensiones del siguiente rectángulo se obtuvieron al multiplicar cada uno de los lados del rectángulo original por $\frac{3}{4}$.



a) ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo original?
b) ¿Qué operaciones realizaron para calcular las dimensiones?
c) Al aplicar un factor de $\frac{4}{3}$ a un rectángulo se obtuvo la siguiente figura.



- ¿Cuáles son las medidas del rectángulo original? ______________________

4. Comparen sus respuestas y respondan.

a) ¿La división de fracciones siempre es posible expresarla como una multiplicación de fracciones?
b) En caso de que alguno de sus compañeros tenga dudas o no comprende alguna operación apóyenlo al explicarle cómo responder.

InfórMate

Como sabemos, la multiplicación y la división son operaciones inversas. Por ejemplo, si tenemos el número 6 y lo multiplicamos por 4 obtenemos 24, pero si dividimos 24 entre 4 obtenemos 6. Por lo tanto, antes de hablar de la división de fracciones recordemos cómo se multiplican las fracciones.

Multiplicación de fracciones

Recordemos que para multiplicar dos o más fracciones **se multiplican de forma lineal** los numeradores y los denominadores. Es decir, se multiplican los numeradores y el resultado se coloca en el numerador de la fracción final.

Luego se multiplican los denominadores y el resultado se escribe en el lugar correspondiente al denominador de la fracción final. De ser posible, el resultado debe simplificarse.

Por ejemplo:

$$\frac{4}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{4 \times 9}{7 \times 11} = \frac{36}{77}$$

Inverso multiplicativo

El inverso multiplicativo de un número a diferente de 0 es un número b tal que su producto es 1, es decir:

$$ab = 1$$

Si a es una fracción $\frac{p}{q}$, con q diferente de 0, su inverso multiplicativo es $\frac{q}{p}$ porque:

$$\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$$

Ejemplos:

a) El inverso multiplicativo de 7 es $\frac{1}{7}$ pues: $\frac{7}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 7}{7 \times 1} = \frac{7}{7} = 1$

b) El inverso multiplicativo de $\frac{5}{6}$ es $\frac{6}{5}$ pues: $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = \frac{5 \times 6}{6 \times 5} = \frac{30}{30} = 1$

c) El inverso multiplicativo de 0.5 es 2, porque $0.5 \times 2 = 1$.

División de fracciones

Para dividir dos fracciones se emplea el siguiente método:

- La división se expresa como una multiplicación al sustituir el divisor por su inverso multiplicativo.
- Se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.
- Se simplifica el resultado de ser posible.

Por ejemplo, para dividir: $\frac{4}{3} \div \frac{8}{5}$

Se convierte en una multiplicación con el inverso multiplicativo del divisor, es decir:

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{8}$$

Y tú, ¿qué harías?

¿Qué harías si trabajas con un compañero sobre un problema matemático o de otra índole, y él tiene alguna dificultad para comprenderlo o resolverlo? Cada uno de nosotros tiene diferentes capacidades; por ello, si te encuentras en una situación así, te invitamos a colaborar de manera armónica y respetuosa con quienes no tienen las mismas habilidades que tú.

Se multiplican las fracciones:

$$\frac{4}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{4\times 5}{3\times 8}=\frac{20}{24}$$

Se realizan las simplificaciones pertinentes:

$$\frac{20}{24}=\frac{20\div 4}{24\div 4}=\frac{5}{6}$$

Con eso se tiene que $\frac{4}{3}\div\frac{8}{5}=\frac{5}{6}$ porque $\frac{5}{6}\times\frac{8}{5}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}$

Ley del "sándwich"

Existe una manera de dividir fracciones conocida como "la ley del sándwich" y dice lo siguiente:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Una manera de recordarla es con la frase: "extremo por extremo entre medio por medio"

Ejemplo: $\frac{4}{3}\div\frac{8}{5}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{5}}=\frac{4\times 5}{3\times 8}=\frac{20}{24}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Por lo tanto, $\frac{4}{3}\div\frac{8}{5}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{5}}=\frac{5}{6}$ porque $\frac{5}{6}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{3}$

Actividad 10

1. Divide las fracciones siguientes.

a) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=$

b) $\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}=$

c) $\frac{6}{7}\div\frac{4}{5}=$

d) $\frac{3}{4}\div\frac{3}{7}=$

2. Hagan la división de fracciones.

a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}=$

b) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}=$

c) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{9}{4}}=$

d) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}}=$

3. Comparen sus respuestas.

a) Expliquen cómo obtuvieron sus resultados.
b) Pidan asesoría a su docente en caso de duda.

Resolución de problemas

Actividad 11

1. **Resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas con fracciones.**

   a) La chef Laura necesita hacer un empanizado de puerco. Cada orden requiere $\frac{1}{4}$ de kilogramo de harina para su elaboración. Si le piden elaborar $4\frac{1}{2}$ órdenes de empanizado, ¿cuántos kilogramos de harina necesitará en total?

   b) Una pared se utilizará para colocar anuncios. Si un negocio desea colocar un anuncio que abarca $\frac{2}{5}$ partes de la pared y otro negocio rentará $\frac{1}{3}$ del resto, ¿qué fracción de la pared sigue en renta?

   c) Alejandra tiene en una cubeta $1\frac{1}{2}$ litros de pintura que le sobraron de su último mural. Para no cargar toda la cubeta, ella dividirá la pintura en frascos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos frascos necesitará?

   d) El encargado de pintar las banquetas del parque donde patina Mariana utiliza $\frac{2}{3}$ de litro de pintura amarilla por cada tres metros lineales de banqueta que pinta. ¿Cuántos metros de banqueta podrá pintar de amarillo si le dan 10 litros de pintura?

2. **Comparen sus respuestas y comenten los pasos que efectuaron para resolver los problemas.**

   a) Revisen cuál respuesta consideran correcta. Justifiquen su respuesta.

   b) Si consideran que existe algún error, realicen nuevamente esa operación utilizando los pasos de otro compañero y vean qué resultado obtienen.

Actividad 12

Y tú, ¿qué harías?

Cuando resuelves un problema matemático debes decidir cuál es el mejor procedimiento que te permita llegar al resultado correcto; en tu vida cotidiana sucede algo similar, todo el tiempo tomas decisiones, ¿alguna vez has tomado decisiones precipitadas que te lleven a diferentes consecuencias, unas agradables y otros no?, ¿qué puedes hacer para evitarlo?

Antes de tomar una decisión importante, evalúa sus consecuencias para tomar la mejor decisión.

1. **Resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas con decimales.**

   a) Una fábrica produce 4.23 toneladas de productos diariamente. ¿Cuántas toneladas producirá a este ritmo durante 15.5 días?

   b) Maritza compró una lata de pintura que contiene 3.5 litros. Esta pintura la repartirá en botellas cuya etiqueta indica 0.25 litros. ¿Cuántos botecitos podrá llenar?

   c) En una granja se recolectan 3.5 toneladas de maíz, y cada tonelada se vende a 7 000 pesos. En 2018 se esperan recolectar 4.5 toneladas. En caso de venderse toda esta producción, ¿cuánto se recabará?

   d) Una motocicleta consume en promedio 0.018 litros de gasolina por kilómetro recorrido. Con base en esta información, completen la tabla siguiente.

Distancia en km	0.1	0.5	1	12.5	23.5	45.3
Litros consumidos			0.018			

   e) Los 21 litros de pintura amarilla de una cubeta se dividirán en botellas de 1.5 litros, ¿cuántas botellas se llenarán?

   f) Los 25 alumnos de la clase de artes realizarán un dibujo en la barda de la escuela. Para ello, se les distribuirá en partes iguales los 15.5 litros de pintura verde que se tienen, ¿cuánta pintura le tocará a cada uno?

   g) En la etiqueta de todos los productos debe incluirse la información nutrimental que aporta su consumo. Esto puede ayudarte a decidir si debes o no consumirlo, o la cantidad o porción que deberías consumir para mantener una dieta adecuada.

A continuación se muestra la información nutrimental de una gaseosa por porción de 250 ml.

Información Nutricional
Tamaño de la porción 1 vaso (250 ml)
Porciones por envase 4.

Cantidad por porción:	
VALOR ENERGÉTICO	264 KJ/63 kcal
GRASAS	3.6 g
– de las cuales Saturadas	2.5 g
COLESTEROL	0.31 g
HIDRATOS DE CARBONO	4.7 g
– de los cuales Azúcares	4.7 g
PROTEÍNAS	3.4 g
Sodio	0.13 g
CALCIO	110 mg (14% VRN)*

*VRN: Valor de referencia nutricional.
Ingesta Diaria Recomendada para un adulto medio 2 000 kcal.

- Completa la tabla para determinar la cantidad de gramos de grasas, proteínas y azúcares que consumirías de acuerdo con las porciones señaladas.

Porciones consumidas	0.5	2.5	3	4.5
Gramos de proteína				
Gramos de grasa				
Azúcares				

2. Comparen sus respuestas con sus compañeros y, en caso de diferencias, analicen los procedimientos que emplearon.

a) Consideren lo siguiente, ¿ubicaron correctamente el punto decimal al realizar las operaciones?

Actividad 13

1. Resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas con fracciones y decimales.

a) Maritza va a pintar de blanco un muro para prepararlo para hacer un mural. Ella compró 10.5 litros de pintura, pero sólo utilizó $\frac{3}{4}$ de dicha cantidad. ¿Cuántos litros usó para pintar el muro?

b) Un garrafón de 6 litros tiene agua hasta $\frac{3}{4}$ de su capacidad. Si se quiere vaciar esa cantidad de agua en recipientes más pequeños de 0.5 litros de capacidad, ¿cuántos recipientes pequeños se podrán llenar?

c) A Emilio le sobran $\frac{2}{3}$ de una barra de chocolate y le da a su amigo $\frac{1}{5}$ de lo que le queda. Si al pedazo de chocolate que le resta a Emilio después de haberle invitado a su amigo le quiere sacar $\frac{3}{4}$, ¿qué fracción de la barra de chocolate representan estos $\frac{3}{4}$?

d) Julián compró $4\frac{3}{4}$ kilogramos de granola a 94.20 pesos el kilogramo. Él dividió la granola en bolsas de $\frac{1}{4}$ de kilogramo. ¿Cuál es el costo mínimo al que debe vender cada bolsa para recuperar lo pagado?

e) Maritza dio un taller de pintura; al finalizar reunió todos los restos de pintura azul en un frasco de $\frac{3}{4}$ de litro, pero sólo logró llenar $\frac{2}{3}$ de esa botella. Para un nuevo taller de pintura llenará frasquitos con 0.25 litros. ¿Cuántos frasquitos llenará con la pintura reunida?

Imagen 1.2 Frasco con $\frac{3}{4}$ de pintura.

g) Mauricio es un lector de novelas de terror. Ayer leyó tres de los ocho capítulos de un nuevo libro, hoy ha leído el 60% de los capítulos restantes. Si se sabe que los capítulos tienen el mismo número de páginas y las páginas de contenido son 192, ¿cuántas páginas deberá leer mañana para terminar el libro?

2. Comparen las respuestas que obtuvieron con las de los demás equipos.

a) En caso de tener respuestas diferentes, analicen los procedimientos que se utilizaron para determinar la respuesta correcta y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

InfórMate

Para resolver problemas se podrían tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Lee bien el problema. Es necesario comprender cada uno de los aspectos que se presentan en el mismo.
2. Determina qué se pide. Se pierde tiempo y energía si se hacen otras cuentas y se siguen pasos que no son relevantes cuando no se tiene claro lo que se pide.
3. Distingue los datos necesarios. Aquí es donde es indispensable tener los datos del problema que servirán cuando se plantee.
4. Resolver el problema. Aplicar las herramientas y los procesos matemáticos para llegar a la solución.
5. Verificar si el resultado obtenido en realidad cumple con los datos del problema, es decir, se debe comprobar la solución.

Pausa en el camino

Actividad 14

1. Lee los problemas y realiza lo que se solicita.

a) Rebeca se dedica a confeccionar arreglos para eventos sociales. Le piden hacer 65 lazos para decorar las mesas de una boda. Ella utiliza $\frac{4}{5}$ m por cada lazo.

- ¿Podrá elaborar el total de lazos con un rollo de cinta que tiene 48 m?
- ¿Le sobra o le falta cinta para terminarlos?

Datos:

Procedimiento:

Respuesta: ______________________________

b) Días después, le piden a Rebeca crear lazos para una fiesta de quince años. Al finalizar, alguien le dice que ha usado lazos rosados de $\frac{15}{4}$ m de largo y lazos azules de 1.25 m de largo.

- ¿Cuántas veces cabe un lazo azul en uno de color rosado?

Datos:

Procedimiento:

Respuesta: ______________________________

c) Posteriormente, Rebeca debe realizar unos lazos para una celebración infantil y le sobran $3\frac{3}{4}$ m de cinta.

- Si desea cortar pedacitos de 0.15 m de largo, ¿para cuántas piezas le alcanzará?

Datos:

Procedimiento:

Respuesta: ______________________________

2. Intercambien sus respuestas con un compañero.

a) Revisen si obtuvieron las mismas respuestas. En caso de que no sea así, dialoguen sobre cuál les parece el resultado correcto y por qué.

b) Verifiquen las diferencias y similitudes en sus procedimientos.

c) Comenten cuál procedimiento les parece el más adecuado para obtener el resultado correcto.

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

Más por más y menos por menos

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean la siguiente situación.**

Manuel trabaja en un negocio de hot dogs y elaboró la tabla de la derecha sobre los gastos e ingresos que hubo ayer. Inició el día con 1 500 pesos.

Concepto	Monto
Compra de pan	−105 pesos
Venta del día	800 pesos
Compra de cuatro botes de mayonesa	−660 pesos
Mensualidad del carrito de hot dogs	−200 pesos

2. **Respondan.**

a) ¿Cuánto dinero le quedó a Manuel al final del día? ______

b) Si Manuel necesita comprar cuatro botes de cátsup de 80 pesos.

- ¿Esto es un gasto o un ingreso? ______
- ¿Con qué signo lo representarían en la tabla? ______
- En términos de la compra, ¿qué representa la siguiente operación?

$$(-80) + (-80) + (-80) + (-80)$$

______

______

- Siguiendo la estrategia del párrafo anterior, ¿cómo representarían la compra de 50 botes de cátsup? ______

c) ¿Cómo se representarían las respuestas anteriores mediante multiplicaciones?

______

De interés

La multiplicación de dos o más números se puede representar con cualquiera de las siguientes formas equivalentes:

2×3

$2 \cdot 3$

$(2)\,(3)$

3. **Comenten la respuesta de la pregunta anterior y mencionen ejemplos de situaciones que puedan representarse con multiplicaciones de números negativos.**

Ruta del saber

Leyes de los signos

Leyes de los signos para la multiplicación

Actividad 2

1. **Lean la siguiente situación y observen la tabla.**

El jefe de Manuel le pide revisar la tabla que registra el balance del mes de septiembre. En ella se encuentran representados los gastos del mes. Su jefe le comenta que, con base en esta información, debe planificar sus gastos de octubre, considerando que sólo puede realizar un retiro de 1 246 pesos cada cinco días para comprar lo necesario para el negocio.

Los saldos se obtienen al sumar la cantidad disponible con la entrada que se tenga o se resta con los gastos que surjan. Por ello pueden resultar cantidades negativas o positivas.

Por ejemplo el saldo del día 11 se obtiene de sumar el saldo del movimiento anterior (4225.27) con el gasto de ese día (−549.33), es decir:

$$\begin{array}{r} 4225.27 \\ -\ 549.33 \\ \hline 3675.94 \end{array}$$

Día de septiembre	2	5	11	15	22	29
Movimiento	Pago de carnes	Depósito de ganancias	Pago de gasolina	Depósito de ganancias	Pago a provee-dores	Pago de luz
Valor	−$750.50	$2 879.64	−$549.33	$5 983.78	−$643.98	−$1 568.31
Saldo	$1 345.63	$4 225.27	$3 675.94	$9 659.72	$9 015.74	$7 447.43

Glosario

Balance. Es el estado de una empresa o negocio en un tiempo o momento específico que se determina al comparar los gastos e ingresos de la misma. Estos balances pueden resultar como números positivos, si se trata de ganancias o como números negativos, si se trata de pérdidas.

Saldo. Cantidad positiva o negativa que resulta de una cuenta.

Por ejemplo si una empresa tiene en su cuenta de banco $2000 y utiliza $500 en servicios, entonces se dice que su saldo es $1 500. En este caso se habla de saldo a favor.

2. **Respondan.**

   a) ¿Qué indican las cantidades negativas? ______________________

   b) ¿Cuánto suman las cantidades negativas de los movimientos? ¿Qué signo tendrá el resultado? ______________________

3. **Representen el estado de cuenta de octubre en la siguiente tabla y respondan lo que se pide.**

   a) Tomen en cuenta el saldo final del mes de septiembre.

b) Consideren que durante octubre Manuel solamente retira cada 5 días los 1 256 que le autorizó su jefa. No se tienen gastos adicionales ni se generaron ganancias durante este mes.

Día de octubre	5	10	15	20	25	30
Movimiento						
Valor						
Saldo						

c) ¿Qué signo deben tener las cantidades que retiró Manuel de la cuenta de crédito? ¿Por qué? ______

d) ¿Cuánto dinero retiró Manuel durante octubre? ______

e) ¿Cómo representarían con una suma la cantidad que Manuel retiró durante octubre? ______

f) ¿Cómo representarían esa misma operación, pero con una multiplicación? ______

4. **Compartan y justifiquen sus respuestas.**

a) Comenten los procedimientos que utilizaron y, en plenaria, elijan los tres que les parezcan los más adecuados.

b) Escriban en el pizarrón los tres procedimientos y verifiquen el uso de los signos y su importancia para una correcta resolución del problema.

Actividad 3

1. **Lean la siguiente situación.**

El negocio donde trabaja Manuel ha tenido problemas de clientela porque se ha abierto muy cerca otro negocio similar. Debido a esta situación, se calcula que el negocio pierde 150 pesos por día.

a) Completen la siguiente tabla considerando que los números negativos representan pérdidas.

Días	1	2	3	4	5	6
Dinero						

b) ¿Cuánto se calcula que se perderá al finalizar una semana de mala racha? ______

c) Representen la pérdida de una semana mediante sumas.

De interés

Un número es negativo si es menor que 0.

Otro aspecto que caracteriza a los números negativos es que son los inversos aditivos de los números positivos. De esta manera los números enteros están formados por los números positivos, los números negativos y el cero.

d) Ahora exprésenla con una multiplicación.

e) En caso de que se continúe con esa mala racha durante 15 días, ¿de cuánto sería esa pérdida? ______

f) Cuando se suma una misma cantidad k durante un número n de veces, esto se puede representar como el producto de: ______

De interés

Recuerda que el valor absoluto de un número es su valor numérico sin considerar su signo. Por ejemplo, el valor absoluto de $+3$ es 3 y el de -3 es 3.

2. Comparen sus respuestas con las de otra pareja.

a) En caso de haber diferencias, comenten el procedimiento y cómo llegaron a ese resultado.

Actividad 4

1. Resuelve los problemas. Ocupa el recuadro en blanco para realizar tus operaciones y escribir el resultado.

a) ¿Cómo se representa, mediante sumas, la suma de 6 veces el -3?

- ¿Cuál es el resultado? ______

b) ¿Cómo se representa mediante sumas, la suma de 3 veces el -6?

- ¿Cuál es el resultado? ______

2. Representa, mediante una multiplicación, cada uno de los incisos del numeral 1 de la actividad 4.

a) ______

b) ______

Esto señala que:

$$(\quad)(\quad) = (\quad)(\quad)$$

3. Comprueben que se cumplen las siguientes igualdades.

a) $(-2)(4) = (2)(-4)$

b) $(3)(-5) = -(3)(5)$

c) $(3)(-6) = (6)(-3)$

d) $-(12)(11) = (12)(-11)$

4. **Comenten si consideran verdadera o no la siguiente afirmación para dos números naturales *a* y *b*.**

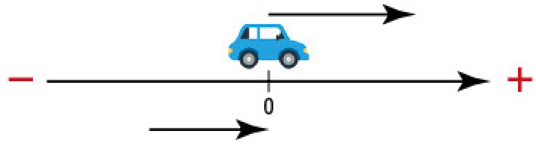
$$(a)(-b) = (b)(-a) = -(a)(b)$$

a) Intercambien sus respuestas con la finalidad de observar si se le escapó algún detalle a su compañero.
b) En caso de que encuentren alguna diferencia, pregúntale a tu compañero por qué lo hizo de esa forma.

Actividad 5

1. **Analicen la información y respondan en su cuaderno.**

Supongan que un automóvil viaja desde un punto de partida que representaremos con el cero. Si se mueve a la derecha del punto de partida, o hacia delante, será una distancia positiva; pero si se mueve a la izquierda del punto de partida, o hacia atrás, será una distancia negativa. De forma similar, si se mueve a la derecha su velocidad se considera positiva y si se mueve a la izquierda su velocidad será negativa.



a) Consideren que el auto marcha hacia adelante desde el punto de origen 0 a una velocidad promedio de 50 km/h.
   - ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el auto después de 3 horas?
   - ¿Qué valores se multiplican para determinar esta posición?
   - Representen este producto: (   )(   ) =
   - ¿Cómo son los números usados y del resultado?
   - Representen la posición del auto en el diagrama anterior.

b) Consideren que el auto marcha hacia atrás desde el punto de origen 0 a una velocidad promedio de −50 km/h.
   - ¿Cuál es su posición después de 3 horas?
   - ¿Qué valores se multiplican para determinar esta posición?
   - Representen este producto:(   )(   ) =
   - Representen la posición del auto en el diagrama anterior.

2. **Consideren la misma situación del automóvil. Pero ahora, supongan que el automóvil se movió por cierto tiempo y ahora su posición actual está en un punto A.**

a) Consideren que el automóvil se movía con una velocidad promedio de 60 km/h.
   - En esta situación, ¿qué signo ha de tener el tiempo tomando en cuenta que estamos hablando de un tiempo pasado?
   - ¿A qué distancia del punto A estaba hace 4 horas?
   - ¿Estaba a la derecha o izquierda de su posición actual?
   - ¿Cómo podemos saber considerando el signo del resultado de tus operaciones, si el auto estaba a la derecha o a la izquierda de la posición actual?

De interés

Recuerda que un número positivo puede llevar el símbolo + o no. Por ejemplo, +3 y 3 representan al mismo número; por tanto, las operaciones:

$(+4) - (+5) =$
$(-3)(+3) =$

También pueden escribirse de forma más simple como:

$4 - 5 =$
$(-3)(3) =$

b) Consideren que el automóvil se movía con una velocidad promedio de -55 km/h.

- En esta situación, ¿qué signo ha de tener el tiempo tomando en cuenta que estamos hablado de un tiempo pasado?
- ¿A qué distancia del nuevo punto estaba hace 2 horas?
- ¿Estaba a la derecha o izquierda de su posición actual?
- ¿Cómo podemos saber considerando el signo del resultado de tus operaciones, si el auto estaba a la derecha o a la izquierda de la posición actual?

3. Comparen sus respuestas y analicen si emplearon correctamente los signos.

a) Analicen las operaciones que plantearon y el carácter positivo o negativo de los números.

b) De acuerdo con el problema, ¿al multiplicar dos números negativos el resultado qué carácter tiene o cómo es?

4. Lleguen a las conclusiones respecto a las multiplicaciones de los signos de acuerdo a la situación del numeral anterior.

a) Multiplicar dos números positivos da un producto ______________

b) Multiplicar un número positivo por uno negativo da un producto ______________

____

c) Multiplicar dos números negativos da un producto ______________

InfórMate

Al realizar un producto de dos factores con signo (+, −), se siguen las reglas de los signos que a continuación se presentan.

Reglas de los signos para la multiplicación

Un número positivo multiplicado por un número positivo da como resultado un número positivo. O sea, se multiplican los números y el resultado es positivo.

Ejemplo:

$$(+4)(+5) = +20$$

Un número negativo multiplicado por un número negativo da como resultado un número positivo. O sea, se multiplican los números y el resultado es positivo.

Ejemplo:

$$(-3)(-7) = +21$$

Un número positivo multiplicado por un número negativo da un número negativo. O sea, se multiplican los números y el resultado es negativo.

Ejemplo:

$$(+4)(-7) = -28$$

Un número negativo multiplicado por un número positivo da un número negativo. O sea, se multiplican los números y el resultado es negativo.

Ejemplo:

$$(-3)(+6) = -18$$

Glosario

Producto. Resultado de una multiplicación.

Relaciona

Recuerda que en primer grado de secundaria estudiaste las reglas para los signos en sumas y restas. Aprovecha este aprendizaje para una mejor comprensión de esta lección.

Leyes de los signos para la división

Actividad 6

1. Respondan lo que se pide.

a) ¿Qué número multiplicado por -2 nos da como resultado 8? Justifica. ______

b) ¿Qué número multiplicado por 4 nos da como resultado -16? Justifica. ______

c) ¿Qué número multiplicado por -5 nos da -15? Justifica. ______

PARA TI©

Ingresa a la siguiente dirección electrónica; en ella encontrarás información complementaria acerca de las operaciones con números negativos.

http://bit.ly/2HudvD7

(Consulta: 25 de enero de 2018).

2. Consideren el numeral anterior y la regla de los signos en la multiplicación para así completar cada uno de los siguientes incisos:

a) Si se sabe que $(-3)(\quad) = 6$, entonces $6/(\quad) = -3$
b) Si se sabe que $(5)(\quad) = -20$ entonces $-20/(\quad) = 5$
c) Si se sabe que $(4)(\quad) = 8$ entonces $8/(\quad) = 4$
d) Si se sabe que $(-30)(\quad) = -90$ entonces $-90/(\quad) = -30$
e) Si se sabe que $(12)(\quad) = -48$ entonces $48/(\quad) = 12$

3. Escriban los resultados de las divisiones.

a) $\dfrac{24}{-2} =$ b) $\dfrac{-32}{4} =$

c) $\dfrac{-12}{-3} =$ d) $\dfrac{120}{6} =$

4. Discutan la relación existente entre la regla de los signos para la multiplicación con la de la división.

a) ¿Por qué se da esta relación?

5. Escriban las reglas de las 4 posibildades de signos en la división.

a) Un número positivo entre otro número positivo da un cociente de signo ______

b) Un número positivo entre un número negativo da un cociente de signo ______

c) ______
d) ______

6. Comenten los resultados de los puntos uno y dos.

a) ¿Obtuvieron las mismas respuestas? Consideren los signos.
b) ¿Qué resultado obtendrían si cambiaran los signos en los ejercicios del punto uno?

7. Acuerden y escriban la manera más adecuada en que se aplican las reglas de los signos.

a) Si no llegan a un acuerdo, consulten con su docente.

Actividad 7

1. **Escribe el resultado de cada una de las divisiones que se presentan en el siguiente esquema.**

÷	−6	−3	3	6	9
−6		$\frac{-3}{-6} = +0.5$			
−3					$\frac{9}{-3} = -3$
3					
6					
9					

2. **Intercambia tu tabla con un compañero.**
   a) Comenten qué operaciones utilizaron en cada caso y la aplicación de las reglas de los signos.
   b) En caso de diferencias en sus resultados, verifiquen a qué se debe y corrijan en caso de ser necesario.

InfórMate

Al realizar una división de dos números con signos (+, −) se siguen las reglas de los signos que a continuación se presentan.

Reglas de los signos para la división

Un número positivo entre un número positivo resulta un número positivo. O sea, se dividen los números y el resultado es positivo.

Ejemplo:

$$\frac{+8}{+5} = (+8) \div (+5) = +1.6$$

Porque $(+1.6)(5) = +8$

Un número negativo entre un número negativo resulta un número positivo. O sea, se dividen los números y el resultado es positivo.

Ejemplo:

$$\frac{-8}{-5} = (-8) \div (-5) = +1.6$$

Porque $(+1.6)(-5) = -8$

De interés

En una división entran en relación diversos elementos; por ejemplo, en la expresión:

$$\frac{a}{b} = c$$

a es el dividendo, *b* es el divisor y *c* el cociente.

Y tú, ¿qué harías?

¿Qué harías para comprender mejor un problema? El intercambio de ideas y la diversidad de éstas te permite ver las cosas de manera distinta, y así, encontrar nuevas maneras de resolver conflictos, no sólo matemáticos, sino en tu vida cotidiana.

Un número positivo entre un número negativo resulta un número negativo. O sea, se dividen los números y el resultado es negativo.

Ejemplo:

$$\frac{+8}{-5} = (+8) \div (-5) = -1.6$$

Porque $(-1.6)(-5) = +8$

Un número negativo entre un número positivo resulta un número negativo. O sea, se dividen los números y el resultado es negativo.

Ejemplo:

$$\frac{-8}{+5} = (-8) \div (+5) = -1.6$$

Porque $(-1.6)(5) = -8$

Para una mayor comprensión de estas reglas aritméticas, recuerda que el empleo de éstas, así como las reglas de los signos, se aplican en diversas áreas de las ciencias como la matemática, física y química, que se relacionan con diversos fenómenos en tu vida diaria; de ahí que es necesario observar algunas aplicaciones de estos.

Resolución de problemas

Actividad 8

1. **Resuelvan los siguientes problemas.**

a) El negocio de Andrés tuvo pérdidas durante los 3 días del fin de semana, debido a contratiempos con algunos clientes, por lo cual el balance dio la cantidad de −$875.2 ¿Cuál es el promedio de las pérdidas diarias?

b) Un buzo se ha sumergido a −23 m para poder realizar algunas fotografías especiales. Pero para poder salir lo tiene que hacer cada 5 metros a intervalos de 4.5 minutos con el fin de evitar complicaciones en su ritmo cardiaco y presión de la sangre. ¿A qué profundidad se hallará después de 12 minutos?

c) Una persona de 110 kilos fue sometida a una dieta rigurosa. Los cálculos de 5 meses indicaron las siguientes pérdidas de kilos.

Mes	1	2	3	4	5
Kilogramos perdidos	−8	−6.5	−5	−3.5	−2

- Si sigue este ritmo, ¿cuál será su pérdida de peso estimado en el sexto mes?
- ¿Cuánto pesa la persona al sexto mes?

d) La temperatura de un congelador de carnes ha estado bajando de forma constante durante 22.8 minutos, si en ese tiempo ha bajado de -3.5° y -10.9° ¿cuántos grados baja cada minuto?

e) Si una motocicleta ha estado moviendose del lado contrario a su punto de origen, ¿a qué distancias se encuentra después de 1.5, 2 y 3.4 horas?, ¿esas distancias se consideran positivas o negativas?

Glosario

Promedio. Resultado de sumar las cantidades a considerar entre el número total de las mismas.

f) Completa la siguiente tabla acerca de las compras realizadas por Antonio.

Producto	Manzanas	Naranjas	Limones	Melones
Precio por kilogramo	35	12.25	30	20.50
Kilogramos comprados	$\frac{1}{2}$ kg	$\frac{3}{4}$ kg	$1\frac{1}{2}$ kg	$1\frac{1}{4}$ kg
Total pagado				

2. Nombren a un representante de equipo para que exponga al resto del grupo sus respuestas.

a) En caso de haber diferencias con los resultados comenten con sus compañeros cuáles son los errores en sus procedimientos.

b) Acuerden un proceso para resolver los incisos en donde obtuvieron respuestas diferentes y comparen nuevamente sus resultados.

Actividad 9

1. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Determinen los valores que se solicitan.

- Encuentren dos números que al multiplicarse den −144, pero al sumarlos den 0. __________
- Encuentren dos números que al multiplicarse den −120 y al sumarse den −1. __________
- Encuentren tres números enteros consecutivos que al multiplicarse den −6. ¿Son los únicos factores? __________

b) En cada una de las tablas se registra el descenso de temperatura en dos cámaras de refrigeración de una carnicería. Complétenlas considerando que la temperatura inicial fue de 0 °C y el descenso es constante.

Cámara de refrigeración 1

Minuto	Temperatura en °C
1	
2	−6
3	
4	
5	
6	−18
7	

Cámara de refrigeración 2

Minuto	Temperatura en °C
1	
2	−5
3	
4	
5	−12.5
6	
7	

Relaciona

En Ciencias y Tecnología. Física de segundo grado aprenderás la relación de la temperatura con tu cuerpo y su importancia.

- ¿Cómo determinaron la temperatura del minuto 1? ______

- Representen la temperatura de la cámara 1 al minuto 15 con una multiplicación. ¿Cuál será el valor de dicha temperatura? ______

- Representen la temperatura de la cámara 2 al minuto 18 con una multiplicación. ¿Cuál será el valor de dicha temperatura? ______

2. **Intercambien sus respuestas con otra pareja.**
   a) En caso de que encuentren alguna diferencia en su resultado, comenten el procedimiento y las operaciones que realizaron.
   b) Lleguen a un acuerdo sobre cuál procedimiento les parece el más adecuado.

Actividad 10

1. **Resuelvan los siguientes problemas.**
   a) Iván encontró una nota periodística que reporta las temperaturas de la semana pasada en su ciudad. Esa nota presenta las temperaturas en una tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Mínimas °C	−5.25	−3.3	−3.87	−1.2	2.46	1	0.25
Máximas °C	10.9	10.8	14.6	18.75	20.6	22.4	20.7

- Determinen el promedio de las temperaturas mínimas registradas esa semana. ____________________
- Determinen el promedio de las temperaturas máximas registradas esa semana. ____________________
- Determinen el promedio diario de la temperatura.

  Lunes: ____________________

  Martes: ____________________

  Miércoles: ____________________

  Jueves: ____________________

  Viernes: ____________________

  Sábado: ____________________

  Domingo: ____________________

b) Indiquen si las siguientes operaciones son correctas y, de no ser así, corríjanlas.

	Correcta	Incorrecta	Justificación
$(-4)(-2) = -8$			
$\frac{15}{-3} = -5$			
$(-1)(3) = -3$			
$\frac{-16}{-8} = -2$			
$(-5)(-5) = -5$			
$\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$			

2. Compartan sus respuestas.

a) Comenten cuántos y qué procedimientos siguieron y si obtuvieron las mismas respuestas.

b) En caso de tener respuestas diferentes, verifiquen a qué se debe y cuáles son las correctas.

Resolución de problemas variados

Actividad 11

1. **Realicen en su cuaderno las siguientes operaciones con fracciones y relacionen la respuesta que le corresponde de las que se encuentran a la derecha; anotando la letra sobre la línea.**

a) $1+0.75\div \quad \frac{5}{4}-0.125 \quad \frac{6}{5} \quad =$ ______ $=0$

b) $1-\frac{4}{11} \quad 1.5-\frac{2}{5} \quad =$ ______ $=-\frac{2}{3}$

c) $1-\frac{5}{6}\div \quad \frac{2}{3}+\frac{1}{6} \quad =$ ______ $=\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3} \quad \frac{5}{10}-0.5 \quad +\frac{1}{3}=$ ______ $=2$

e) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\div \quad \frac{5}{6}-\frac{1}{3} \quad =$ ______ $=\frac{-1}{5}$

f) $\frac{3}{5}- \quad \frac{3}{4}-0.4 \quad \frac{4}{7}=$ ______ $=-0.75$

g) $\frac{7}{13} \quad \frac{1}{3}+\frac{2}{7} \quad -\frac{1}{6}=$ ______ $=\frac{1}{6}$

h) $\frac{1}{3}+0.75 \quad \div\frac{13}{8}-\frac{4}{3}=$ ______ $=0.7$

i) $\frac{-4}{2} \quad (-0.25)\div \quad -\frac{2}{3} \quad =$ ______ $=0.4$

2. **Comparen sus respuestas con las de los demás equipos.**
   a) En caso de tener respuestas diferentes, intercambien sus procedimientos con otro equipo.
   b) Verifiquen las operaciones y argumenten cuál procedimiento les parece el adecuado para obtener una respuesta correcta, o bien, si consideran que hay más de una respuesta correcta.
   c) Si tienen dudas, consulten con su docente.

Pausa en el camino

Actividad 12

1. **Resuelve en el espacio dado cada uno de los siguientes problemas.**

   a) ¿A qué distancia se encuentra una bicicleta que va de regreso a una velocidad constante de 11 m/s después de 34.6 s?, ¿será un desplazamiento negativo o positivo?

   - Se considera un desplazamiento negativo cuando el objeto está por debajo de su lanzamiento vertical o posición de origen.

   b) Un empleado que limpia los cristales externos de un rascacielos que tiene sus pisos de igual altura inicia su descenso desde el piso más alto y va bajando de piso en piso conforme acaba. Si se encuentra a -22.88 m de su punto de partida ¿cuántos pisos ha descendido si se sabe que cada piso del edificio mide 2.86 m?

   c) ¿A qué profundidad se encuentra un submarino si este desciende a una velocidad constante de 0.8 km/h durante $\frac{3}{4}$ de hora?

   d) Jhonny les propone un problema aritmético a sus amigos, les indica que deben encontrar dos números cuya multiplicación sea igual a $-\frac{3}{8}$. Si uno de los números es 0.5, ¿cuál es el valor del segundo número?

2. **Responde a partir de la siguiente secuencia:**

$(-1)(-1) = 1$
$(-1)(-1)(-1) = (-1 \times -1)(-1) = (1)(-1) = -1$
$(-1)(-1)(-1)(-1) = (-1 \times -1)(-1 \times -1) = (1)(1) = 1$
$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = (-1 \times -1)(-1 \times -1)(-1) = (1)(1)(-1) = -1$

   a) Cuando se tiene un factor par de (-1) el resultado es ______
   b) Cuando se tiene un factor impar de (-1) el resultado es ______
   c) ¿Serán válidos los puntos anteriores para cualquier otro número? ______

3. **Expongan sus ejemplos al resto del grupo.**

   a) Con ayuda del docente, elijan tres de los ejemplos presentados y verifiquen si realmente funciona en su vida cotidiana.

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

¿Qué tanto se reproduce la naturaleza?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean el problema y respondan.

Roberto revisa una publicación en internet referente a la reproducción celular. El sitio que visita indica que algunas células se reproducen por bipartición, es decir, una célula denominada madre se divide en dos células hijas, las cuales son idénticas a la célula madre (imagen 3.1). Esto ocurre con las bacterias, las amebas y las algas. En algunos casos, la bipartición de una célula inicia cada 10 minutos.

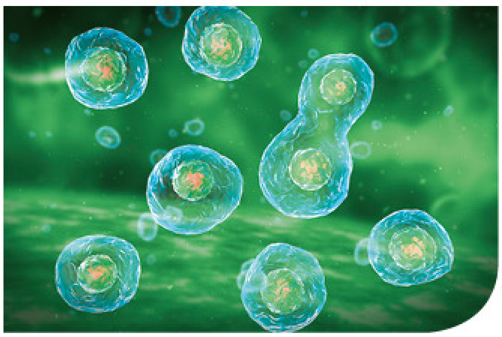


Imagen 3.1 La biología recurre a las matemáticas para estudiar fenómenos y procesos biológicos, como la partición de células de la imagen.

a) Si una célula se biparticiona cada 10 minutos, ¿cuántas habrá después de hora y media? ____________________

Relaciona

En la asignatura de *Ciencias y Tecnología* de primer grado aprendiste sobre las bacterias y diversos organismos, ¿te acuerdas? Ahora podrías calcular su población.

2. Describan el procedimiento que llevaron a cabo para responder la pregunta anterior.

3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

a) Comenten si hubo diferencias en sus operaciones y procedimientos y a qué creen que se debió.
b) Acuerden el procedimiento que les parezca el más adecuado para la resolución del problema.

Ruta del saber

Leyes de los exponentes

Multiplicación de potencias

Actividad 2

1. **Lean y completen lo que se indica.**

En un laboratorio donde se estudia la producción de bacterias es necesario enviar algunos paquetes. Dicho envío se hará por medio de una empresa de paquetería especializada que utiliza cajas cúbicas con bases obviamente cuadradas. Algunas de ellas tienen las siguientes medidas.

Caja tipo A: 9 cm por lado
Caja tipo B: 16 cm por lado
Caja tipo C: 27 cm por lado
Caja tipo D: 64 cm por lado
Caja tipo E: 81 cm por lado

a) Representen las áreas de cada una de las bases de las cajas como un producto y como una potencia.

- Área caja A: $(9)(9) = (9)^2$
- Área caja B: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja C: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja D: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja E: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$

b) Representen los volúmenes de cada una de las cajas como un producto y como una potencia.

- Área caja A: $(9)(9) = (9)^3$
- Área caja B: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja C: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja D: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$
- Área caja E: $(\quad)(\quad) = (\quad)^{\_\_}$

2. **Representen las medidas de cada lado de las cajas como una potencia de base 2, 3 o 4, según corresponda.**

- $9 = 3^{2}$
- $16 = \_\_\_\_$
- $27 = \_\_\_\_$
- $64 = \_\_\_\_$
- $81 = \_\_\_\_$

3. **Compartan sus respuestas con su profesor y compañeros y justifiquen cómo las obtuvieron.**

a) Consideren explicar ¿cómo obtuvieron los exponentes en cada caso?
b) Revisen sus operaciones que realizaron, vean si hay errores y corrijan en caso necesario.

Actividad 3

1. **Completen los datos que hacen falta.**

a) La potencia 7^4 tiene base ________ y exponente ________ . Esta última se puede expresar como el producto cuyo resultado es:

$$7^4 = 7 \times \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

2. **Expresen como potencia los siguientes productos.**

a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ ______

b) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ______

c) $(-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) =$ ______

d) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ______

3. **Expresen como producto las siguientes potencias.**

a) $4^2 =$ ______ b) $6^5 =$ ______ c) $(-8)^3 =$ ______

4. **Compartan sus respuestas con otras parejas.**

a) Explíquenles cómo las obtuvieron.

b) Intercambien sus procedimientos y verifiquen si obtienen el mismo resultado.

c) En caso de duda, soliciten apoyo del docente.

Actividad 4

1. **Lean y completen los datos de la tabla.**

Multiplicación de potencias	Multiplicación de bases	Resultado	Expresión del resultado como una sola potencia
$3^2 \times 3^4 =$	$\underbrace{3 \times 3}_{\text{2 veces}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 veces}}$	729	3^6
$5^3 \times 5^2 =$			
$(6.5)^2 \times (6.5)^2 =$			
$8^1 \times 8^4 =$			
$9^1 \times 9^3 =$			
$3^3 \times 3^0 =$			

2. **Respondan.**

a) Según los datos de la tabla completada ¿cómo puedes llegar de la expresión $3^2 \times 3^4$ a 3^6 sin necesidad de realizar la multiplicación de las bases?, ¿qué operación se realiza con los expononentes?

b) ¿Ocurre algo similar con las demás potencias?

c) Si tenemos que $3^3 \times 3^0 = 3^3$, lo que indica que $3^0 =$ ______. ¿Qué sucedería con otro valor como $5^0 =$ ______ ? Argumenten su respuesta.

3. **Resuelvan los siguientes productos, expresando el resultado como una potencia de la misma base.**

- $2^2 \times 2^3 =$ ______
- $4^6 \times 4^8 =$ ______
- $(12)^2 \times (12)^{10} =$ ______
- $(8.4)^3 \times (8.4)^2 =$ ______
- $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 =$ ______

4. **Expongan sus resultados ante el grupo. Consideren lo siguiente:**
   a) ¿Cómo determinaron los exponentes en cada caso?
   b) ¿Se relaciona el signo de la base con el exponente a emplear?
5. **Soliciten apoyo al docente en caso de dudas.**

InfórMate

El siguiente producto $5 \times 5 \times 5 = 125$ se puede expresar como una potencia de base 5 y exponente 3, por lo que se representará de la siguiente manera:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Glosario

Potencia. Expresión que consta de una base y un exponente.

Cuando una potencia tiene exponente 1, éste puede no escribirse para simplificar la escritura. Por ejemplo,

$5^1 = 5$

y

$a^1 = a$

donde a es un número entero.

Actividad 5

1. **Formulen una regla general que permita calcular el resultado de multiplicar dos potencias de la misma base y expresarlo como una sola potencia de la misma base y escríbanla en su cuaderno.**
2. **Compartan su fórmula con otro equipo.**
   a) Expliquen cómo obtuvieron su fórmula.
   b) Comenten cuáles son las ventajas y desventajas que observan en cada una y cómo creen que podrían mejorarla.
3. **Calculen en su cuaderno las siguientes multiplicaciones de potencias aplicando la regla que eligieron.**
   a) $5^4 \times 5 =$
   b) $\frac{1}{3}^{4} \times \frac{1}{3}^{2} =$
   c) $4^3 \times 4^2 \times 4^2 =$
   d) $(4.5)^2 \times (4.5)^2 \times (4.5) =$
   e) $\frac{11}{22}^{0} \times \frac{11}{22}^{0} =$
4. **Preparen una exposición con los resultados que obtuvieron.**
   a) Comenten qué dificultades encontraron al utilizar su fórmula.
   b) Con ayuda del docente, escuchen las dificultades de sus compañeros y propongan soluciones a cada uno.

División de potencias

Actividad 6

1. **Completen los datos que se solicitan en la tabla.**

División de potencias	Visto con multiplicaciones	Recuerda que	Resultado	Visto como una sola potencia
$\frac{3^5}{3^3} =$	$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} =$	$\frac{3}{3} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{3}\, 3 \times 3$ $= 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3$ $= 3^2 =$	9	3^2
$\frac{9^3}{9^2} =$				
$\frac{5^5}{5^5} =$				
$\frac{7^6}{7^2} =$				
$\frac{(4.78)^5}{(4.78)^3} =$				
$\frac{8^8}{8^3} =$				

De interés

Cuando se tiene la potencia de una fracción, el exponente aplica tanto al numerador como al denominador. Por ejemplo:

$$\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \frac{6^3}{12^3}$$

2. **Respondan con base en sus respuestas de la tabla.**

   a) ¿Qué regularidad observan entre los exponentes de la primera columna con el resultado de la última?

   b) ¿Los factores del numerador se pueden cancelar, simplificar o eliminar con los del denominador? ¿Cuántos factores puedes cancelar? ¿Por qué?

3. **Resuelvan las siguientes divisiones en el recuadro de la derecha y expresen el resultado como una potencia de la misma base.**

   - $\frac{3^{2\,021}}{3^3} = 3^{2\,021-3} = 3^{2\,018}$
   - $\frac{(25)^{25}}{(25)^{20}} = 25^{25-20} =$
   - $\frac{(8.65)^{23}}{(8.65)^{20}} =$
   - $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} =$

4. **Comenten con otro equipo las operaciones y procedimientos que realizaron.**

   a) En caso de existir diferencia entre sus respuestas, verifiquen la razón y argumenten cómo las obtuvieron.

Actividad 7

1. **Formulen una regla general que permita representar la división de dos potencias de la misma base como una sola potencia de esa misma base y escríbanla en su cuaderno.**

2. **Dialoguen con sus compañeros acerca de la regla que escribieron y lleguen a un acuerdo para definir qué regla consideran es la más adecuada para su representación.**

3. **Resuelvan en su cuaderno las siguientes divisiones en los recuadros. Apliquen la fórmula general que realizaron.**

   a) $\frac{6^3}{6^3} =$ b) $\frac{(21)^{2\,018}}{(21)^{2\,018}} =$ c) $\frac{(3.3)^8}{(3.3)^8} =$

4. **Compartan sus resultados.**

   a) Verifiquen si la fórmula les permitió obtener un resultado o encontraron otro procedimiento para llegar a él.

   b) Si no están de acuerdo con el resultado, consulten con su docente.

5. **Comenten con sus compañeros sus respuestas y lleguen a una conclusión.**

Problemas con exponente

Potencia de una potencia

Actividad 8

1. **Retomen la situación de las cajas que emplea la empresa de envíos vista en la actividad 2. En específico cómo representaron las medidas de las cajas con potencias de base 2, 3 o 4 en el numeral 2 con la finalidad de completar la tabla siguiente.**

Tipo de caja	Medida del lado de la caja	Medida del lado de la caja como potencia	$V = l^3$	$V = (l)(l)(l)$	Volumen como multiplicaciones de la base	Volumen visto como una potencia
A	9	3^2	$(3^2)^3$	$(3^2)\ (3^2)\ (3^2)$	$(3\times3)\ (3\times3)\ (3\times3)$ $= 3\times3\times3\times3\times3\times3$	3^6
B	16					
C	27					
D	64					
E	81					

a) Revisen con otra pareja que se hayan obtenido los mismos valores en la tabla. Ajustar donde sea necesario justificando matemáticamente el porqué.
b) De acuerdo a la tabla ¿porqué se justifica que el volumen de la caja A es igual a $(9)^3 = (3)^6$?
c) ¿Existe alguna relación entre las potencias de los exponentes de las columnas 4 y 7?
d) Discutan cuál es esta relación o regularidad.

Relaciona

En tu curso anterior de *Matemáticas* calculaste el volumen de prismas mediante el desarrollo y aplicación de fórmulas que te será de utilidad para esta lección.

2. **Respondan con base en los datos de la tabla.**

a) ¿Qué relación encuentran en el volumen visto $V = (3^2)^3$ con la forma $V = 3^6$?
b) ¿Cuál es la regularidad en los exponentes?
c) ¿Pasa lo mismo con los volúmenes de las otras cajas?

3. **Completen la tabla con los datos que se solicitan.**

Potencia de potencias	Desarrollo con el exponente externo	Desarrollo con los exponentes internos	Visto como una sola potencia
$(4^2)^3$	$(4^2)\ (4^2)\ (4^2)$	$(4\times4)\ (4\times4)\ 4\times4)$ $= 4\times4\times4\times4\times4\times4$	4^6
$(8^5)^2$			
$(9)^{11}$			
$((3.9)^2)^3$			

4. **Respondan lo siguiente.**

a) ¿Cuál es la regularidad en los exponentes?
b) ¿Qué operación se realiza con las potencias para que se convierta en una sola?

5. **Resuelvan las siguientes potencias y expresen el resultado como una potencia de la misma base.**

a) $(11^5)^{12} =$ ______

b) $\left((9.9)^9\right)^9 =$ ______

c) $(16^3)^6 =$ ______

d) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{111} =$ ______ $=$ ______

6. **Comenten sus resultados considerando lo siguiente.**

a) El procedimiento que siguieron para obtener las potencias.
b) Qué dificultades enfrentaron y cómo fue que lo solucionaron.

Actividad 9

1. **Escriban en su cuaderno una regla general que permita representar la potencia de una potencia como potencias de base 2 o 3.**

2. **Dialoguen con sus compañeros acerca de la regla que escribieron. Consideren lo siguiente.**

a) Ventajas y desventajas de cada fórmula.
b) Es clara y permite aplicarse en diversos casos.

3. **Utilicen la regla que escribieron para pasar a exponente positivo cada una de las siguientes potencias y calcular su valor.**

a) $\frac{5}{6}^{\,2\;\;3} =$

b) $(9^4)^2 =$

c) $\left((0.1)^5\right)^2 =$

4. **Expongan sus resultados.**

a) Verifiquen si obtuvieron el mismo resultado y, en caso contrario, comenten la razón.

5. **Elijan dos reglas de las que expusieron y nuevamente resuelvan lo que se piden en el punto 3.**

a) Verifiquen si obtuvieron el mismo resultado.
b) En caso de dudas, consulten con su docente.

Potencia de exponentes negativos

Actividad 10

1. **Comenten cómo hallar las potencias siguientes.**
   a) $(-3)^2$
   b) $-(3)^2$
   c) $(3)^{(-2)}$

2. **Completen la siguiente tabla considerando la regla de división de potencias.**

División de potencias (exponente negativo)	Reducción de exponentes	Visto con multiplicaciones	Visto con exponente positivo
$\frac{3^3}{3^5}$	$3^{3-5} = 3^{-2}$	$\frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3}$	$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$
$\frac{9^2}{9^3}$			
$\frac{(8.3)^3}{(8.3)^8}$			
$\frac{7^2}{7^6}$			

3. **Respondan.**
   a) ¿Cuál es la regularidad en los exponentes?
   b) ¿Todos los exponentes resultaron positivos al final?
   c) ¿Qué operación se realiza con las potencias de la primera columna para obtener la de la última columna?

4. **Expresen las siguientes potencias de exponente negativo en una potencia de la misma base con exponente positivo.**

   a) $5^{-2\,000} =$

   b) $2^{-4} =$

   c) $(23.5)^{-5} =$

   d) $\frac{1}{6}^{\,-6} =$

5. **Comparen sus respuestas con otra pareja.**

   a) Verifiquen la aplicación de la ley de signos y expliquen sus procedimientos.

Actividad 11

1. **Formulen una regla general que permita representar la potencia con un exponente negativo como una potencia con exponente positivo y escríbanla.**

De interés

Para entender temas complejos de matemáticas, es necesario saber las bases. Por ello te recomendamos el siguiente libro de tu Biblioteca Escolar y de Aula.

Crilly, Tony, *50 cosas que hay que saber de matemáticas*, Barcelona, Ariel, 2014.

2. **Dialoguen con otro equipo sobre su fórmula.**
   a) Comenten las ventajas y desventajas que observan.
3. **Utilicen la regla que escribieron para pasar a exponente positivo cada una de las siguientes potencias y calcular su valor.**
   a) $\frac{5}{6}^{\,-2} =$
   b) $6^{-3} =$
   c) $\frac{1}{8^{-4}} =$
4. **Intercambien la fórmula con otro equipo y realicen nuevamente los problemas del punto tres.**
   a) Comenten si obtuvieron las mismas respuestas que obtuvieron al usar su fórmula.
   b) En caso contrario, verifiquen por qué fue así.

InfórMate

Ley de los exponentes

Regla del producto de potencias

Cuando se multiplican dos o más potencias con una misma base, el resultado es una potencia con la misma base y un exponente que resulta de la suma de los exponentes de las potencias multiplicadas.

En términos matemáticos, dados tres números enteros a, m y n se tiene la siguiente fórmula:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Donde a representa a la base de las potencias y m y n son los exponentes en cuestión. Se tiene también que, para cualquier base a diferente de cero, $a^0 = 1$. Ejemplo:

$$4^3 \times 4^{2015} = 4^{3+2015} = 4^{2018} \text{ y } (2018)^0 = 1.$$

Regla de la división de potencias

Cuando se dividen dos potencias con una misma base, el resultado es una potencia con la misma base y un exponente que resulta de la resta de los exponentes. Al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

En términos matemáticos, dado a un número entero diferente de 0 y m y n enteros cualesquiera se tiene la siguiente fórmula:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Donde a representa a la base de las potencias y m y n son los exponentes en cuestión. Ejemplo:

$$\frac{(17)^5}{(17)^2} = (17)^{5-2} = (17)^3$$

Recuerda que $a^0 = 1$, pues se observa que $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$

Regla de la potencia de una potencia

Cuando se calcula la potencia de una potencia, el resultado es una potencia con la misma base y un exponente que resulta de la multiplicación de los dos exponentes.

En términos matemáticos dados tres números enteros a, m y n se tiene la siguiente fórmula:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Donde a representa a la base y m y n son los exponentes en cuestión. Ejemplo:

$$(146^3)^{11} = (146)^{3 \times 11} = 146^{33}$$

Regla del exponente negativo en una potencia

Cuando se tiene una potencia con exponente negativo y se desea expresarla con un exponente positivo, se usa la fracción inversa de la base, pero con un exponente positivo.

En términos matemáticos, dado a un número entero diferente de 0 y m y n enteros cualesquiera se tiene la siguiente fórmula:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{o} \quad \frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

Donde a representa a la base de las potencias y m el exponente en cuestión. Ejemplo:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{5}{9}\right)^3} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{5^3}{9^3}} = \frac{9^3}{5^3} = \left(\frac{9}{5}\right)^3.$$

Problemas

Actividad 12

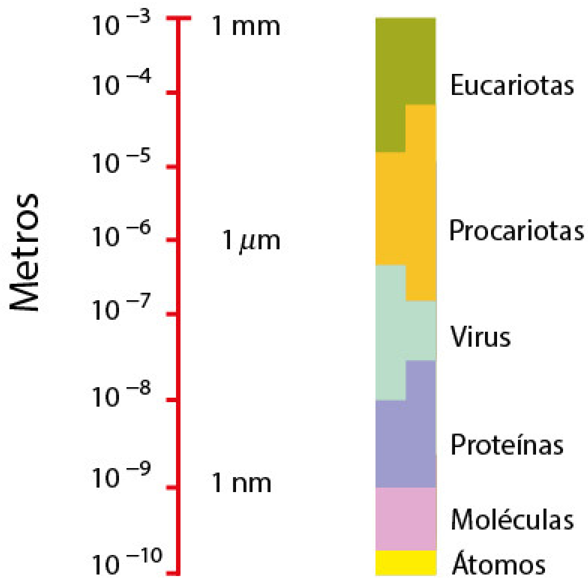
1. **Lean la siguiente información y respondan.**

En el sistema métrico decimal, el metro es la unidad de medida base. Sin embargo, existen organismos y partículas muy pequeñas, para los cuales es necesario emplear subdivisiones del metro. En la siguiente gráfica se presentan los tamaños de algunos de dichos organismos y partículas, los cuales pueden ir desde 10^{-3} hasta 10^{-10} metros.

Relaciona

Como ya habrás considerado en la asignatura de *Ciencias y Tecnología. Física*, las medidas de longitud tienen sus divisiones (como metros, centímetros, milímetros, etc.).

Otras de ellas, más pequeñas, son: micrómetros (μm) y nanómetros (nm). Éstas se usan en diversas ramas tecnológicas, científicas y biológicas.



a) ¿Cuál de las tres dimensiones presentadas (1 mm, 1 μm, 1 nm) es la más pequeña y cuál es la más grande?

2. **Completen la siguiente tabla.**

Nombre	Vista con exponente negativo	Vista con exponente positivo	Vista como decimales
1 mm	10^{-3}	$\frac{1}{10^3}$	0.001
1 μm			
1 nm			

3. **Comenten en qué caso tuvieron dificultades.**

a) ¿Emplearon de forma correcta las reglas de los exponentes?
b) En caso de ser necesario, corrijan sus operaciones.

Actividad 13

1. **Encuentren el valor que debe tener la incógnita correspondiente escribiendo sus operaciones en los recuadros.**

   a) $5^x = \frac{1}{5^2}$, $x =$

   b) $(3^3)(3^x) = 3^{10}$, $x =$

   c) $\frac{2^{2x}}{2^6} = 1$, $x =$

   d) $(7^x)^3 = 7^{12}$, $x =$

2. **Relacionen las columnas de la siguiente tabla.**

   a) Escriban la letra que corresponda a la expresión equivalente que está en la columna derecha.

Potencia	Equivalente
( ) $\frac{12^6}{12^4}$	A) 6^{-4}
( ) $(5^2)^2$	B) a^{5+x}
( ) $\frac{5}{9}^{3} \frac{5}{9}^{3}$	C) a^{300}
( ) $\frac{1}{6^{-4}}$	D) 3^{27}
( ) $(a^2)(a^3)(a^x)$	E) $\frac{5}{9}^{6}$
( ) $\underbrace{(a^3)\ (a^3)\ \cdots\ (a^3)}_{\text{100 veces}}$	F) 144
( ) $\left((3^3)^3\right)^3$	G) 2^4
( ) 6^{-4}	H) a^{5-x}
( ) $(2)^{2^2}$	I) 625
( ) $\frac{a^5}{a^x}$	J) $\frac{1}{6^{-4}}$

Y tú, ¿qué harías?

La ciencia estudia el crecimiento de los virus y bacterias para comprender su comportamiento, ya que algunas de ellas altamente contagiosas. Por ello es bueno preguntarse qué acciones puedes realizar, tanto en tu casa como en tu comunidad, para prevenir las enfermedades.

3. **Comparen sus respuestas con las que obtuvieron sus compañeros e indiquen las leyes que utilizaron en cada inciso.**

   a) En caso de encontrar diferencias, comenten el procedimiento y operaciones que realizaron para obtenerlas.

Aproximaciones de raíces cuadradas

Actividad 14

1. **Lean el siguiente problema y respondan.**

   Juan debe cercar un terreno cuadrado de 121 m² de área; para ello necesita saber cuánto debe medir cada lado del terreno. Recordemos que el área del cuadrado se obtiene como $A = l^2$, con l como la medida del lado del cuadrado.

   a) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado? ______________________

   ____

   b) Si ahora Juan debe cercar un terreno de 256 m², ¿cuánto medirá cada lado?

   ____

2. **Describan, en el siguiente recuadro, el procedimiento que utilizaron para resolver el problema anterior.**

De interés

La raíz cuadrada es la operación contraria de elevar al cuadrado. En la expresión:

$$\sqrt{a} = b$$

a es el subradical y *b* es la raíz, y se cumple que $b^2 = a$.

3. **Intercambien su procedimiento con otra pareja.**
4. **Respondan las preguntas de los incisos a y b del punto uno realizando el procedimiento de la otra pareja.**

   a) ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿Les fue más fácil o difícil resolver el problema con el procedimiento de la otra pareja?
   b) En caso de detectar alguna deficiencia en su procedimiento, corríjanla.

Actividad 15

1. **Encuentra un número que al multiplicarlo por sí mismo resulte 81 y escríbelo en tu cuaderno.**

   a) ¿Existirá otro número que al multiplicarlo por sí mismo resulte 81? En caso afirmativo, ¿cuál es? ______________________

2. **Encuentra un número que al elevarlo al cuadrado resulte 169 y escríbelo en tu cuaderno.**
   a) ¿Existirá otro número que al elevarlo al cuadrado resulte 169? En caso afirmativo, ¿cuál es?

3. **Compartan sus resultados.**
   a) Comenten el procedimiento que siguieron para obtenerlos.
   b) En caso de duda, consulten con su docente.

InfórMate

Si el cuadrado de un número es 324, para saber cuál es ese número aplicamos la operación conocida como raíz cuadrada, la cual se expresa con el símbolo $\sqrt[2]{\ }$ pero se acostumbra representarla sin el índice 2, así: $\sqrt{\ }$. Por ejemplo:

$$l^2 = 324 \qquad l = \sqrt{324}$$

Entonces debemos encontrar un número que al multiplicarlo por sí mismo resulte 324. En este caso tenemos que $18 \times 18 = 324$, pero también $-18 \times -18 = 324$; por lo tanto, decimos que:

$$l = \sqrt{324} = 18 \quad \text{y} \quad l = \sqrt{324} = -18$$

Esto significa que todo número mayor que cero tiene dos raíces: una positiva y una negativa.

También es importante mencionar lo siguiente:

a) La raíz de 0 es 0 dado que $0^2 = 0 \times 0 = 0$ y
b) La raíz cuadrada de un número negativo no es tema de este curso.

PARA TIC

Consulta los siguientes enlaces, donde podrás aprender otro método de aproximación de la raíz cuadrada. Se trata del método geométrico.

http://bit.ly/2sHjxwE
http://bit.ly/2EY0001

(Consulta: 13 de febrero de 2018).

Actividad 16

1. **Encuentren las dos raíces de los siguientes números.**

a) $\sqrt{225} =$ $\quad \sqrt{225} = +$ ______ $\quad \sqrt{225} = -$ ______

b) $\sqrt{625} =$

c) $\sqrt{196} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{6}} =$

De interés

Cuando se tiene la raíz cuadrada de una fracción, ésta se puede dividir como la raíz cuadrada del numerador y la raíz cuadrada del denominador. Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

e) $\sqrt{0.25} =$

f) $\sqrt{\dfrac{0.16}{0.25}} =$

g) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} =$

h) $\sqrt{32} =$

a) Valida tus resultados con la calculadora.
b) ¿Qué sucede con la $\sqrt{32}$, es exacta? Comenten sobre las dificultades y lo que observaron en el cálculo de esta raíz.

2. **Analicen la infomación.**

InfórMate

Algoritmo para calcular la raíz cuadrada sin calculadora mediante aproximaciones

Ejemplo: Determinar la raíz cuadrada de 20, es decir, $a = \sqrt{20}$. Buscamos dos números enteros consecutivos que, multiplicados por sí mismos nos den un número cercano a 20. Uno de los resultados mayor y el otro menor a 20. En este caso son 4 y 5, pues,

$$4 \times 4 = 16 \qquad\qquad 5 \times 5 = 25$$

Probemos con un valor entre 4 y 5. Por ejemplo, 4.5, y calculemos su cuadrado.

$$4.5 \times 4.5 = 20.25$$

Vemos que nos hemos pasado, así que ahora probamos con el número decimal anterior, o sea, 4.4.

$$4.4 \times 4.4 = 19.36$$

Así que la raíz estará entre 4.4 y 4.5; ahora probamos con 4.45.

$$4.45 \times 4.45 = 19.8025$$

Se puede seguir utilizando esta secuencia de manera sucesiva hasta obtener un valor más exacto. En nuestro caso, la aproximación de la raíz cuadrada con dos decimales es $a = \sqrt{20} \approx 4.45$, pero se pueden calcular los decimales que se quiera.

II Pausa en el camino

Actividad 17

1. Realiza las siguientes operaciones con potencias.

a) $(-2)^4 =$ ______________

b) $(2)^3 \times (2)(-4) =$ ______________

c) $\dfrac{\frac{3}{8}^{2018}}{\frac{3}{8}^{2017}} =$ ______________

d) $((-7)^4)^2 =$ ______________

e) $\dfrac{5^3 5^{-2}}{5^4 5^{-1}} =$ ______________

f) $5^{-2} =$ ______________

g) $\dfrac{1}{2^{-5}} =$ ______________

h) $\dfrac{1}{1.5}^{-3} =$ ______________

2. Aproximen las raíces cuadradas con el algoritmo visto. Aproximen tantos decimales como su docente les señale.

a) $\sqrt{60} =$ ______________

b) $\sqrt{20} =$ ______________

c) $\sqrt{90} =$ ______________

d) $\sqrt{450} =$ ______________

c) $\sqrt{200} =$ ______________

3. Resuelvan los siguientes problemas.

a) El dueño de un terreno de sembrado, de forma cuadrada, desea cercarlo con un alambre de púas. Si el costo del alambre es de \$ 4.5 por metro lineal y el área del terreno es de 2 084 m², ¿cuánto costará cercar el terreno?

b) Un albañil utilizó 4 900 losas cuadradas para poder cubrir un área cuadrada. Si cada losa mide 15 cm de lado, ¿de qué dimensiones es el área que cubrió el albañil?

c) Ramiro practica la papiroflexia. En cierta ocasión quería saber qué pasaría si al doblar una hoja por la mitad y luego, sin desdoblar, volver a doblarla por la mitad. Es decir, al realizar el primer movimiento tendría $\frac{1}{2}$ de hoja, al realizar el segundo movimiento tendría la mitad de la mitad de la hoja original.

- ¿Cómo se expresa con potencias si la fracción de hoja que queda al realizar 5 movimientos de doblar a la mitad?
- ¿Cuál es el valor de esta fracción?

Glosario

Papiroflexia. Es el arte de realizar figuras de papel realizando dobleces de formas sucesivas.

4. Compartan sus resultados y procedimientos.

a) Verifiquen si éstos fueron los adecuados.

b) Pidan asesoría a su docente en caso de no llegar a un acuerdo sobre cuál es el procedimiento correcto.

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Proporcionalidad

Mientras más seamos, menos tardamos

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean la siguiente información.**

   El ingeniero Mauro tiene a su cargo una cuadrilla de ocho trabajadores que hacen las instalaciones eléctricas en casas iguales de un fraccionamiento en construcción (imagen 2.1). Dicha cuadrilla está tan bien acoplada que pueden finalizar la instalación eléctrica de una casa en sólo cuatro días. Sin embargo, se le informa al ingeniero que cuatro trabajadores se han enfermado y recibieron incapacidad por una semana.

2. **Respondan.**

   a) Si el resto de los trabajadores inicia una instalación eléctrica de una casa, ¿en cuántos días terminarán la instalación? Subraya la respuesta correcta.

   - 2 días
   - 4 días
   - 8 días
   - 16 días

   b) Escriban las operaciones que realizaron para determinar su respuesta.

3. **Comparen sus respuestas y procedimientos.**

   a) Comenten las diferencias que encontraron en sus operaciones y argumenten cuál es la respuesta correcta.
   b) Justifiquen sus respuestas y pregunten a un compañero que haya obtenido un resultado diferente al suyo, cómo llegó a él.

Ruta del saber

Proporcionalidad directta

Razones y proporciones

Actividad 2

1. **Resuelvan los siguientes problemas.**

   a) María solicitó un préstamo en el banco; ella tiene que pagar 200 pesos de interés por cada 1 000 pesos que recibió. ¿Cuál es la tasa de interés del préstamo? ______

   b) Si en una caja hay 60 manzanas, y de éstas cinco están podridas, ¿cuál es el porcentaje de manzanas podridas? ______

   c) Si un automóvil que transita en carretera viaja a velocidad constante y recorre 180 km cada dos horas, ¿cuál es su velocidad o la razón a la que cambia la distancia cada hora? ______

   d) En un pueblo de 250 habitantes, sólo 100 saben leer y escribir. ¿Cuál es el **índice** de alfabetismo en dicho pueblo? ______

   e) Marco atrapó un pez de 50 cm y Alfonso uno de 20 cm. ¿Cuántas veces es más grande el pescado de Marco con respecto al de Alfonso? ______

Glosario

Tasa o índice. En matemáticas hace referencia a una comparación entre dos magnitudes por medio de un cociente (división). Por ejemplo, la tasa de desempleo se calcula al dividir el número de personas desempleadas entre el número de personas económicamente activas de una población.

2. **Comparen sus respuestas con las de otras parejas.**

   a) Determinen cuál respuesta consideran correcta y el por qué.

   b) Comenten cómo obtuvieron esa respuesta e intercambien sus procedimientos y, si tienen dudas, pregunten a su compañero.

   c) Comenten cuáles problemas se resuelven con fracciones y si sería posible obtener respuestas diferentes que, igualmente, sean correctas. Si tienen dudas sobre esto, consulten con su docente.

InfórMate

En matemáticas, una **razón** es una relación entre dos magnitudes que pueden compararse entre sí. Una razón surge cuando una de las magnitudes se divide por otra. Las razones pueden expresarse como fracciones o como decimales. Por ejemplo, si a una escuela asisten 450 alumnos y hoy sólo llegaron 200, la razón de asistencia es de $\frac{200}{450}$. Cuando se tienen dos razones, como $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se dice que están en proporción si se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Entonces, una proporción es una igualdad entre dos razones. En una proporción las posiciones que ocupan las magnitudes a y d se denominan valores extremos de la proporción, mientras que las magnitudes b y c reciben el nombre de valores medios de la proporción. Además, también cumplen que:

$$a \times d = b \times c$$

Es decir, la multiplicación de los valores medios es igual a la de los valores extremos. Por ejemplo, en la proporción $\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$ se observa que $4 \times 63 = 7 \times 36$.

Actividad 3

1. **Lean la siguiente información y respondan.**

   Un grupo de albañiles necesita preparar una mezcla para una construcción. Dicha mezcla debe tener las mismas características de consistencia y homogeneidad para evitar que la construcción se caiga. El ingeniero les indica que por cada cuatro cubetas de arena que utilicen para la mezcla deben usar seis de grava.

   a) ¿Cuántas cubetas de grava serán necesarias para preparar la mezcla si se utilizaron 15 cubetas de arena? ______

   b) ¿Cuántas cubetas de arena serán necesarias para preparar la mezcla si se utilizaron 21 cubetas de grava? ______

2. **Completen la siguiente tabla empleando la información anterior.**

Cubetas de arena	Cubetas de grava	Razón entre las cubetas de arena y de grava
4		$\frac{6}{4} = 1.5$
1		
	3	
12		
	22	
21		

3. **Respondan basándose en los resultados de la tabla.**

   a) ¿Todas las mezclas tendrán la misma concentración de arena y grava?, ¿por qué? ______

4. **Describan los procedimientos que siguieron para determinar el número de las cubetas de arena que se necesitan para realizar la mezcla.**

5. **Intercambien sus respuestas con otros equipos.**

   a) Consideren el orden en el que escribieron las razones de las cubetas de arena y grava en la tabla. ¿Qué observan? ______

   b) Comenten, ¿coinciden con las suyas? ¿Identifican algún error?¿Creen que son correctas? ______

c) Expliquen si los procedimientos que describieron en el punto cuatro de la actividad son similares

d) Elijan un procedimiento de un compañero diferente al suyo para responder el inciso a) del punto tres y vean si obtienen el mismo resultado. Descríbanlo.

Relaciona

Recuerda que en primer año se trabajó con la proporcionalidad directa. Aunque aquí hicimos un pequeño recordatorio, te invitamos a que repases esos temas.

InfórMate

Dos magnitudes o conjuntos de datos son directamente proporcionales si el **cociente o división de las cantidades correspondientes es constante**. Esta constante se denomina constante de proporcionalidad, y se representa con k.

Otra forma de expresar lo anterior, es que dos magnitudes son directamente proporcionales si cuando una de ellas aumenta la otra también lo hace en la misma proporción o si una disminuye la otra también en la misma proporción.

Sugerencias para colocar las proporciones directas

Cuando se tiene un problema de proporcionalidad directa, un posible inconveniente que se puede presentar es cómo acomodar los datos del problema para resolverlo. Una de las soluciones más comunes es obteniendo una tabla de proporciones, y de ahí plantear las razones o divisiones de forma horizontal o lineal.

Por ejemplo:

Para preparar el desayuno de 136 albañiles son necesarios 32 kilogramos de arroz. ¿A cuántos albañiles es posible alimentar con la misma ración si sólo se tienen 12 kilogramos de arroz? Los datos se pueden colocar de la siguiente manera:

Albañiles	Kilogramos de arroz
136	32
x	12

Colocamos x en el lugar que corresponde al valor que deseamos saber, es decir, x representa la cantidad de albañiles que se han de alimentar con 12 kilogramos de arroz.

Como se trata de un problema de proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad se forma al dividir los datos siempre en el mismo sentido. Así, tenemos que:

$136 \rightarrow 32$ genera la razón $\frac{136}{32}$ $\qquad$ $x \rightarrow 12$ genera la razón $\frac{x}{12}$

Por tanto, al usar estas dos razones se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{136}{32} = \frac{x}{12}$$

Al resolverla se obtiene $x = 51$; esto es, se puede alimentar a 51 albañiles con los 12 kilogramos de arroz disponibles.

Proporcionalidad inversa

Actividad 4

1. **Lean la siguiente situación y, con base en ella, completen la tabla.**

La inmobiliaria en donde trabaja el ingeniero Mauro le pide construir una terraza y necesitan saber las posibles dimensiones de ésta. La única restricción es que la terraza debe tener forma rectangular y que su área total sea de 24 m^2.

Relaciona

Recuerda que en tu curso anterior de *Matemáticas* calculaste el perímetro de cuadriláteros, lo cual te será de utilidad en esta lección.

Ancho *a* en metros	Largo *b* en metros	Área de la terraza
1		(1) (24) = 24
2		
	8	
4		
4.8		
	3	
	2	
24		

2. **Respondan de acuerdo con los datos de la tabla anterior.**

a) ¿Qué sucede al largo de la terraza cuando el ancho crece? ______

b) Si el ancho de la terraza fuera de 5 m y su largo debería ser de 4.8 m, ¿qué sucedería con el valor del largo si el ancho, en lugar de medir 5 m, midiera el doble? ______

c) Si el ancho de la terraza fuera de 2.5 m su largo debería ser de 9.8 m, ¿qué sucedería con el valor del largo si el ancho, en lugar de medir 2.5 m, midiera el triple? ______

d) ¿Qué valor se mantiene constante en la tabla? ______

3. **Comparen sus respuestas.**

a) Argumenten cuál respuesta les parece correcta y qué procedimiento el más adecuado. ______

b) Acuerden, con ayuda del docente, dos procedimientos que les parezcan más adecuados para obtener la respuesta correcta. ______

Actividad 5

1. **Comenten acerca de cómo responder las siguientes preguntas relativas al problema determinado.**

   Una alberca de 350 m³ se llena hasta su máxima capacidad con 10 diferentes llaves que tienen el mismo flujo continuo. Se sabe que si se abren cinco de esas llaves tardan ocho horas para llenar la alberca totalmente desde que está vacía.

   a) Mientras más llaves abiertas haya, ¿en cuánto tiempo se llena la alberca?, ¿aumenta, disminuye o se mantiene igual? ______

   b) Mientras menos llaves abiertas haya, ¿en cuánto tiempo se llena la alberca?, ¿aumenta, disminuye o se mantiene igual? ______

2. **Completen la tabla de acuerdo a los datos del problema anterior.**

Número de llaves	5	6	7	8	9	10
Tiempo de llenado en horas	8					

3. **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.**

   a) Describan el procedimiento que usaron para obtener los valores de la tabla. ______

   b) Si obtuvieron respuestas diferentes, verifiquen las diferencias y la razón de éstas. ______

InfórMate

Dos magnitudes o dos conjuntos de datos son inversamente proporcionales si el producto o multiplicación de las cantidades correspondientes es constante. Dicha constante se denomina constante de proporcionalidad inversa y se representa con *k*.

Otra forma de expresar lo anterior es que dos magnitudes son inversamente proporcionales si cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en la misma proporción o si una disminuye, la otra aumenta en la misma proporción.

De interés

Con el fin de aprender las matemáticas desde sus aspectos históricos te recomendamos el siguiente libro de tu biblioteca escolar y de aula.

Potter, Lawrence, *A jugar con las matemáticas*, Mexico, SEP, Hiperlibro, 2015.

Sugerencias para colocar las proporciones inversas

Así como en los problemas de proporcionalidad directa, para la proporcionalidad inversa también pueden presentarse problemas para acomodar los datos, en donde también es posible usar una tabla de proporciones. Sin embargo, en este caso se plantearán multiplicaciones de forma horizontal o lineal. Por ejemplo: si tres plomeros tardan 10 días en efectuar un trabajo, ¿cuánto tiempo tardarán seis plomeros en hacer el mismo trabajo? Los datos se pueden colocar en forma de tabla, como se hizo en la sección "InfórMate" anterior.

Plomeros	Tiempo de trabajo (días)
3	10
6	x

El valor que se pretende conocer es x, es decir, x representa la cantidad de días que trabajarán los plomeros hasta terminar la obra. Como se trata de un problema de proporcionalidad inversa, en este caso la constante de proporcionalidad se forma del producto o multiplicación de los datos; en este caso tenemos:

$3 \rightarrow 10$, lo que genera el producto (3) (10).

$6 \rightarrow x$, lo que genera el producto (6) (x).

Por lo que al usar estos dos productos para establecer la igualdad:

$$(3)\,(10) = (6)\,(x)$$

Al resolver la expresión anterior se obtiene que $x = 5$.

Actividad 6

1. **Completen cada una de las siguientes tablas conforme se especifica la situación en el encabezado de las mismas y escriban en la línea el tipo de proporcionalidad del que se trata o bien si no existe proporcionalidad.**

a) Un automóvil consume 15 litros de gasolina por cada kilómetro.

km	Litros
	750
150	
300	

- Tipo de proporcionalidad: ____________________
- Argumenten su respuesta. ____________________

____

b) Dos pintores tardan tres días en terminar un trabajo.

Pintores	Días
2	
	4
4	

- Tipo de proporcionalidad:
- Argumenten su respuesta.

c) El costo total a pagar por los lápices que se compren si todos tienen el mismo precio.

Cantidad	Costo total
5	
	40
	60

- Tipo de proporcionalidad:
- Argumenten su respuesta.

2. Determinen si los datos de la situación presentan variación de proporcionalidad directa, inversa o no existe proporcionalidad.

a) El lado de un cuadrado y su área.

b) La cantidad de horas que estudia un alumno y la de horas que juega con su celular.

c) El lado de un cuadrado y su perímetro.

d) La cantidad de aprobados y la de reprobados en un grupo.

e) La cantidad de días que durará determinada cantidad de raciones de alimento y la de personas que es necesario alimentar.

f) La cantidad de horas trabajadas y el salario que se pague por ellas.

g) La cantidad de dinero que ahorra un trabajador de su quincena y la que gasta de la misma.

h) El número necesario de albañiles y el tiempo para terminar una obra.

3. Preparen una exposición con sus resultados y preséntenla al grupo cuando su docente lo señale.

a) Argumenten cómo obtuvieron el resultado y qué dificultades enfrentaron.

b) Consideren los elementos o datos que les permitieron determinar el tipo de proporcionalidad o bien si no existía.

4. Escriban en su cuaderno el procedimiento que les parezca más adecuado para la resolución de estos problemas y lo puedan utilizar más adelante.

PARA TI©

Consulta la siguiente liga, en donde podrás analizar ejemplos referentes al planteamiento y resolución de proporciones directas e inversas:

http://bit.ly/2BhwAI5

(Consulta: 5 de febrero de 2018).

Actividad 7

1. **Resuelvan los siguientes problemas. Pueden utilizar el procedimiento que eligieron en el punto 4 de la actividad anterior.**

a) Una máquina fabrica 600 clavos en cuatro horas. ¿Cuánto tiempo tardará en fabricar 1 000 clavos si mantiene ese ritmo de producción?

Datos:	Proporción:	Resultado:

b) Una fábrica de motocicletas ensambla 351 unidades cada seis horas. Si se mantiene el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántas unidades se fabricarán en 10 horas?

Datos:	Proporción:	Resultado:

Y tú, ¿qué harías?

Si tú fueras el gerente de una fábrica, ¿qué harías para contratar a trabajadores con capacidades diferentes? ¿Cómo los tratarías respecto de los demás para que terminen su trabajo a tiempo? ¿Les exigirías trabajar al mismo ritmo que los otros?
Te invitamos a compartir con tus compañeros, actitudes de inclusión y respeto en la vida diaria.

c) Una llave arroja de forma constante 20 litros de agua por minuto y tarda 24 horas en llenar un depósito. Si la llave arrojara 28 litros de agua por minuto, ¿en cuánto tiempo llenaría el depósito?

Datos:	Proporción:	Resultado:

d) Se sabe que nueve cargadores descargan un tráiler en tres horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 15 cargadores en descargar el mismo tráiler si mantuviesen el mismo ritmo de trabajo?

Datos:	Proporción:	Resultado:

e) Un pintor cobra 1 550 pesos por cinco días de trabajo. ¿Cuántos días trabajó si cobró 4 650 pesos?

Datos:	**Proporción:**	**Resultado:**

f) Un ciclista recorre cierta distancia a una velocidad promedio de 30 m/s durante 10 min. Si desea recorrer la misma distancia reduciendo 2 min su tiempo anterior, ¿a qué velocidad promedio deberá pedalear?

Datos:	**Proporción:**	**Resultado:**

g) Un electricista necesita 12.5 metros de cable para hacer cinco instalaciones eléctricas idénticas en los baños de casas iguales. ¿Cuántos metros de cable necesitará para hacer siete instalaciones similares?

Datos:	**Proporción:**	**Resultado:**

h) Un barco tarda ocho horas en ir del puerto A al puerto B viajando a una velocidad promedio de 20 nudos. Si otro barco hace el mismo recorrido a una velocidad promedio de 6.5 nudos, ¿cuánto tiempo tardará?

Datos:	**Proporción:**	**Resultado:**

Glosario

Nudo. Velocidad usada en rutas marítimas.

i) De forma general el cabello humano crece 1 cm cada tres semanas. A este ritmo, ¿cuántas semanas serán necesarias para que a una mujer le crezca 50 cm?

Datos:	**Proporción:**	**Resultado:**

2. **Elijan uno de los problemas que resolvieron en esta actividad.**

a) Asignen a un miembro del equipo para que exponga al grupo cómo lo resolvieron.

3. **Realicen, con la guía del docente, las exposiciones.**

a) En caso de que otro equipo haya obtenido un resultado diferente para el mismo problema, comenten sus procedimientos y las similitudes y diferencias.
b) Si coinciden en sus respuestas, verifiquen si también en el procedimiento.

Reparto proporcional

Actividad 8

1. **Lean la siguiente información. Posteriormente respondan las preguntas.**

Tres amigos compraron un boleto de lotería que costó 50 pesos. Ángel puso 25 pesos, Maribel 15 pesos y Noé 10 pesos. El boleto resultó premiado con 10 000 pesos y quieren repartir dicho premio de acuerdo con lo que aportó cada uno.

a) ¿A quién le corresponde una cantidad mayor del premio y a quién una menor? ¿Por qué? ____________________

b) Ángel dice que él aportó la mitad del costo del boleto, ¿esto es cierto? Argumenten su respuesta. ____________________

c) Si Ángel puso la mitad del costo del boleto, ¿cuánto del premio le corresponde? Argumenten su respuesta. ____________________

d) En términos de fracciones, ¿qué parte del costo del boleto puso Maribel y qué parte puso Noé? ____________________

e) ¿Cuánto del premio le corresponde a Maribel y cuánto a Noé? Argumenten su respuesta. ____________________

f) ¿Se repartió todo el premio? ¿Faltó o sobró dinero? ____________________

2. **Comenten qué operaciones son necesarias para responder las preguntas anteriores.**

a) Es importante que argumenten sus puntos de vista.

Actividad 9

1. **Lean la siguiente información.**

Alejandro decide dar su domingo a sus hijos en partes directamente proporcionales a las notas que obtuvieron en la clase de Matemáticas esa semana. En total repartirá 399 pesos, y las calificaciones fueron: Alberto 6, Bety 8 y Claudia 7.

2. **Resuelvan los siguientes problemas con base en la información anterior.**

a) Realicen las operaciones necesarias para esto en los recuadros.

- ¿Cuánto le corresponde de domingo a Alberto?

- ¿Cuánto le corresponde de domingo a Bety?

- ¿Cuánto le corresponde de domingo a Claudia?

3. **Compartan sus respuestas.**

a) Comenten si consideran posible utilizar más de un procedimiento para resolver los problemas anteriores.

b) Verifiquen si estos procedimientos les parecen más claros o más difíciles.

InfórMate

El reparto directamente proporcional permite dividir una cantidad en partes directamente proporcionales a otras.

Por ejemplo, si se desea dividir proporcionalmente la cantidad N entre tres cantidades a, b y c, es necesario encontrar los valores x, y y z, tales que $x + y + z = N$, y que se cumpla:

$$\frac{x}{a} = k, \frac{y}{b} = k \text{ y } \frac{z}{c} = k$$

Donde k representa la constante de proporcionalidad. De acuerdo con lo anterior, se cumple que $x = ka$, $y = kb$ y $z = kc$. Por tanto,

$$x + y + z = N$$

$$ka + kb + kc = N$$

$$k(a + b + c) = N$$

$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

Entonces, las siguientes proporciones permitirán calcular los valores x, y y z.

$$\frac{x}{a} = \frac{N}{a + b + c} \qquad \frac{y}{b} = \frac{N}{a + b + c} \qquad \frac{z}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

PARA TIC

Para entender mejor la proporcionalidad, te invitamos a visitar la siguiente página en donde encontrarás problemas y reglas de proporcionalidad.

http://bit.ly/2uMGQSw

(Consulta: 15 de junio de 2018)

Ejemplo:

Se repartirán 5 000 pesos entre Ana, Beto y Carlos, de forma proporcional a los días que cada uno trabajó en un proyecto. Si Ana trabajó dos días, Beto tres y Carlos cinco, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Cantidad a repartir:

$$N = 5\ 000$$

Cantidades entre las que se realizará el reparto:

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = 5$$

Definamos:

$$x = \text{cantidad para Ana}$$

$$y = \text{cantidad para Beto}$$

$$z = \text{cantidad para Carlos}$$

Las proporciones serán las siguientes:

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \qquad \frac{5\,000}{10} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b} \qquad \frac{5\,000}{10} = \frac{y}{3}$$

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c} \qquad \frac{5\,000}{10} = \frac{z}{5}$$

Resolvemos cada una de las tres proporciones de modo que los resultados son los siguientes:

$$\frac{5\,000}{10} = \frac{x}{2} \qquad x = 1\ 000$$

$$\frac{5\,000}{10} = \frac{y}{3} \qquad y = 1\ 500$$

$$\frac{5\,000}{10} = \frac{z}{5} \qquad z = 2\ 500$$

Por tanto:

- A Ana le corresponden 1 000 pesos.
- A Beto le corresponden 1 500 pesos.
- A Carlos le corresponden 2 500 pesos.

Pausa en el camino

Actividad 10

1. **Resuelve los siguientes incisos relativos a proporciones. Distingue si se trata de una proporción directa o inversa o de reparto proporcional.**

   a) Tres amigos se asocian para generar ganancias. Ángel aporta $5 000, Beto $7 500 y Carlos $9 000. Al término de un mes han ganado $6 450. ¿Cuál es la cantidad que les corresponde de esta ganancia si se la distribuyen en proporción al capital aportado?

Datos:	Tipo de problema:	Proporción:	Constante:	Resultado:

   b) Un autobús demora una hora en llegar a su destino si viaja a 80 km/h, ¿cuánto tiempo se tardará en llegar al mismo destino si viaja a 100 km/h?

Datos:	Tipo de problema:	Proporción:	Constante:	Resultado:

   c) Se nos presta un mapa de la ciudad en donde la escala indica que 5 cm equivalen a 600 m. Si deseamos ir a un lugar que en el mapa está a 8 cm de nuestra posición, ¿cuántos metros tendremos que movernos?

Datos:	Tipo de problema:	Proporción:	Constante:	Resultado:

2. **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.**

   a) Comenten cómo determinaron qué operaciones aplicar en cada problema.
   b) Reflexionen y lleguen a un acuerdo de cómo identificar una situación de proporción directa, proporción inversa o de reparto proporcional. Participen con respeto y orden.

3. **Escriban dos ejemplos de su contexto donde se presenten problemas de proporcionalidad directa y dos de proporcionalidad inversa.**

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Ecuaciones

Acertijo de dos números desconocidos

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Inicio del camino

Actividad 1

Glosario

Incógnita. Variable que interviene en una ecuación y que representa a valores desconocidos; se simboliza con las letras *x*, *y*, *z*, *v*, *t*, etcétera.

1. **Representen mediante una ecuación, con el uso de la incógnita apropiada, cada una de las siguientes expresiones.**
   a) El triple de un número más 7 es igual a 20. ____________
   b) El doble de un número disminuido en 4 es igual a 15. ____________
   c) La suma de tres números consecutivos es igual a 200. ____________
   d) La resta de un número menos 4 es igual al triple del número más 5. ____________
   e) La mitad de un número aumentado en dos es igual a 10. ____________
2. **Analicen las ecuaciones que plantearon y determinen cuáles son correctas.**
3. **Analicen la siguiente situación y respondan.**

Se necesita su apoyo para ayudar a Xóchitl con un reto que le presenta su amiga María. Dicho reto consiste en encontrar "el valor de dos números desconocidos" apoyándose en algunas pistas, pero utilizando el menor número de éstas. Mientras más pistas se usen, menor será el premio.

Por ejemplo, el premio será de 100 pesos si sólo se da una pista; de 50 pesos si se utilizan dos pistas; de 10 pesos si se dan tres, y en caso de usar cuatro pistas no habrá premio.

Además, si Xóchitl proporciona una respuesta incorrecta, perderá inmediatamente. Las posibles pistas que Xóchitl no conoce son las siguientes:

- Si se suman los dos números se obtiene 14.
- Uno de los números es mayor a 7 y el otro menor a 7.
- Ambos números son impares.
- La resta del mayor menos el menor es igual a 4.

Relaciona

En tu asignatura de *Lengua Materna. Español* de segundo grado, aprenderás a compartir y comprender diferentes textos. Esto te será de utilidad en matemáticas, pues la comprensión de la información es importante para la resolución del problema.

a) ¿Se puede ganar con sólo una pista? ¿Con cuál? Argumenten cómo pueden estar seguros de cuáles son los números desconocidos.
b) ¿Cuántas y cuáles son el menor número de pistas que necesita Xóchitl para saber cuáles son los números que se buscan?
c) ¿Cuáles son los números que se buscan?

4. **Dialoguen y lleguen a una conclusión acerca de cuáles son las pistas que permiten hallar los números que se buscan.**

Ruta del saber

Sistema de ecuaciones 2 × 2

Lenguaje algebraico

Actividad 2

1. **Lean la siguiente información.**

   Jehú y Brenda van a comprar hamburguesas a un local cercano a su casa. Jehú pidió tres hamburguesas y dos aguas de limón; mientras que Brenda pidió dos hamburguesas y un agua de limón. A Jehú le cobraron 99 pesos y a Brenda 61 pesos.

   Para plantear algebraicamente este problema, consideren a h como el precio de cada hamburguesa y a a como el precio de cada agua de limón.

2. **Resuelvan con base en la lectura anterior.**

   a) ¿Cómo se representa algebraicamente el precio de las tres hamburguesas?

   b) ¿Qué significa la expresión $2h$?

   c) ¿Cuál es la representación algebraica del precio de las dos aguas de limón?

   d) ¿Qué representa la expresión $3h + 2a$?

   e) ¿Qué expresión algebraica nos sirve para representar el costo de dos hamburguesas y un agua de limón?

   f) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para representar algebraicamente la situación descrita? Argumenten su respuesta.

   g) ¿Cuáles son las ecuaciones que representan el pago de Jehú y Brenda al comprar sus hamburguesas y aguas?

De interés

Una ecuación que tiene una o más variables con exponente uno y que no presenta productos entre variables, se llama ecuación de primer grado o ecuación lineal. Por ejemplo, son ecuaciones de primer grado:

$$3x - 4 = 8$$
$$5 + y = 5y - 15$$
$$z + y + 4 = x$$

3. **Comparen y analicen sus respuestas.**

   a) Consideren que las ecuaciones pueden no ser iguales pero sí representar lo que pagaron Jehú y Brenda.
   b) En caso de tener diferentes respuestas, verifiquen si ambas son correctas.
   c) En caso de no ser así, comenten cuál creen que fue el error y propongan cómo solucionarlo.

4. **Consideren las 2 ecuaciones que representan lo que pagaron Jehú y Brenda para encontrar los valores de *h* y a que hacen que cada una de las ecuaciones se cumplan.**

   a) Pueden emplear una tabla como la siguiente con el fin de dar con la respuesta.

Valor de h	Valor de a	Sustitución de la ecuación de Jehú	Sustitución de la ecuación de Brenda	¿Cumple ambas ecuaciones?
25	11	$3(25) + 2(11) = 75 + 22 = 97$	$2(25) + (11) = 50 + 11 = 61$	No

Actividad 3

1. **Expresen la o las ecuaciones que representan cada una de las siguientes situaciones en los recuadros respectivos. No es necesario resolverlas.**

   a) María pagó 125 pesos por la compra de cinco cuadernos.

   b) Rubén dice que la suma de dos números es 400 y su resta es 36.

De interés

Cuando sólo se tiene un valor desconocido puede emplearse la incógnita *x*, y si se tiene dos valores desconocidos se usan las incógnitas *x*, *y*. Aunque pueden usarse otras literales.

c) Marcos compró tres libretas y cuatro lápices, por los cuales pagó 115 pesos.

d) Juana pagó 50 pesos por seis paquetes de lápices y cinco libretas; por su parte, Antonieta pagó 84 pesos por un paquete de lápices y dos libretas.

e) El perímetro de un rectángulo que mide el doble de largo que de ancho es 60.

f) Mauricio dice que la quinta parte de la suma de dos números es 8 y la mitad de la diferencia de ambos números es 2.

g) Alfredo comenta que su edad es tres veces la de su hijo Freddy.

2. **Analicen sus respuestas y determinen cuáles son las expresiones algebraicas adecuadas para cada problema.**

a) ¿Algún compañero utilizó otras literales para representar a las incógnitas?
b) Si emplearon variables diferentes, ¿la expresión cambió o es la misma al usar otras variables? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Cuántas incógnitas hay en cada situación?
d) ¿Cuántas literales emplearon para representar a cada ecuación?

InfórMate

En primer año de secundaria estudiaron cómo resolver problemas utilizando ecuaciones cuando era necesario calcular una cantidad desconocida. Sin embargo, existen situaciones o problemas en los cuales **se desconocen dos cantidades**. Cuando esto sucede, usamos expresiones como:

$$ax + by = c$$

donde *a* y *b* son valores constantes y *x* y *y* son incógnitas. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones lineales de dos incógnitas.

Para hallar los dos valores desconocidos se requieren al menos dos ecuaciones lineales, como:

$$ax + by = c \quad \text{Ecuación lineal 1}$$
$$dx + ey = f \quad \text{Ecuación lineal 2}$$

donde *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* son valores constantes, y *x* y *y* son incógnitas. A este arreglo se le nombra sistema de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas o sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Por ejemplo: Juan ahorra parte de sus domingos en una alcancía electrónica que sólo acepta monedas. La pantalla de la alcancía indica que Juan ahorró 505 pesos y que depositó 63 monedas. Si Juan sólo depositó monedas de 5 y de 10 pesos, ¿cuántas monedas de cada denominación hay en la alcancía?

Según el problema, es necesario determinar la cantidad de monedas de 5 y de 10 pesos. Es decir, hay dos valores desconocidos y es posible utilizar las incógnitas *x* y *y*, donde:

x representa la cantidad de monedas de 5 pesos
y representa la cantidad de monedas de 10 pesos

Además, el problema tiene dos partes que relacionan a las incógnitas.

Parte 1. La indicación de la cantidad total que ha ahorrado Juan: "La pantalla de la alcancía indica a Juan que ahorró 505 pesos [...] sólo ha depositado monedas de 5 y de 10 pesos".

Parte 2. La indicación de la cantidad de monedas que hay en la alcancía: "La pantalla de la alcancía indica a Juan [...] que depositó 63 monedas [...] sólo depositó monedas de 5 y de 10 pesos".

De cada una de estas partes se plantean las siguientes ecuaciones.

Parte 1 $\rightarrow$ Ecuación 1: $5x + 10y = 505$.   Parte 2 $\rightarrow$ Ecuación 2: $x + y = 63$.

Con estas ecuaciones se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2.

$$5x + 10y = 505$$
$$x + y = 63$$

Solución de un sistema de ecuaciones

InfórMate

Los sistemas de ecuaciones tienen gran utilidad para resolver situaciones o problemas que requieren del conocimiento del valor de ciertas incógnitas.

Actividad 4

1. **Lean el siguiente problema y contesten lo que se plantea.**

   Miguel y María fueron a la papelería a comprar útiles escolares. Miguel compró dos cuadernos y dos bolígrafos por 60 pesos, y María compró tres cuadernos y un bolígrafo de las mismas marcas y precios que Miguel, pero ella pagó 74 pesos.

   a) ¿Cuántos valores desconocidos se tienen en la situación y cuáles son? ______

   b) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa el problema? Escríbanlas como se indica.

   - Ecuación de lo que compró Miguel:
   - Ecuación de lo que compró María:

   c) ¿El valor de la incógnita que representa el número de cuadernos tiene que ser el mismo en ambas ecuaciones o puede ser diferente? ¿Por qué? ______

   d) ¿El valor de la incógnita que representa el número de bolígrafos tiene que ser el mismo en ambas ecuaciones o puede ser diferente? ¿Por qué? ______

2. **Lean y argumenten si Miguel o María tiene la razón y por qué.**

   a) Miguel dice que cada cuaderno debe costar 20 pesos y cada bolígrafo 10 pesos, pues con esos precios se cumple lo que pagó.
   b) María dice que cada cuaderno debe costar 22 pesos y cada bolígrafo 8 pesos, pues con esos precios se cumple lo que pagó.

   - ¿Cuál es el precio de cada cuaderno y de cada bolígrafo? ______

3. **Analicen sus respuestas.**

   a) Comenten el procedimiento que siguieron.
   b) En caso de no coincidir en sus respuestas, compartan sus procedimientos y operaciones para ver la razón de su diferencia.
   c) Finalmente, verifiquen si con el precio del cuaderno y el precio del bolígrafo se completa la cantidad que pagaron Miguel y María.

De interés

Los sistemas de ecuaciones tienen gran utilidad para resolver situaciones o problemas que requieren del conocimiento del valor de ciertas incógnitas.

InfórMate

La solución de un sistema de ecuaciones 2×2 está compuesta por los valores de las dos incógnitas que satisfacen a las dos ecuaciones al mismo tiempo, es decir, al sustituirlas en cada una de las ecuaciones del sistema, éstas resultan verdaderas.

Por ejemplo, la solución del siguiente sistema es $x = 1$ y $y = 2$.

$$4x + 3y = 10$$
$$2x - 7y = -12$$

Esto porque al sustituir los valores en ambas ecuaciones la igualdad que se establece en las dos es cierta. Veamos.

1. Sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = 2$ en la ecuación $4x + 3y = 10$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 10 \\ 4(1) + 3(2) &= 10 \\ 4 + 6 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

2. Sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = 2$ en la ecuación $2x - 7y = -12$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x - 7y &= -12 \\ 2(1) - 7(2) &= -12 \\ 2 - 14 &= -12 \\ -12 &= -12 \end{aligned}$$

Como se puede ver, la solución de un sistema de ecuaciones 2×2 siempre será una pareja de valores, uno para cada incógnita.

Métodos de resolución

Método gráfico

Actividad 5

Relaciona

Existen diferentes métodos para trazar la gráfica de una recta.

Una es despejar la variable dependiente y tabular puntos que se ubican en el plano. Otra es encontrar los cortes con los ejes y trazar la recta empleando esos dos puntos. Este último método no requiere hacer los despejes.

1. **Analicen el sistema de ecuaciones y realicen lo que se pide más adelante.**

$$3x - 5y = 30 \quad \text{Ecuación 1}$$
$$2x + 4y = -2 \quad \text{Ecuación 2}$$

a) Grafiquen las ecuaciones anteriores. Para ello, podemos emplear los pasos que se indican a continuación. Dichos pasos permiten graficar la ecuación sin la necesidad de despejar la variable y en las ecuaciones.

- $3x - 5y = 30$

  I. Intersección con el eje x. Se sustituye $y = 0$ en la ecuación y se obtiene que $x =$ ______. Entonces la intersección es en el punto (______, 0).

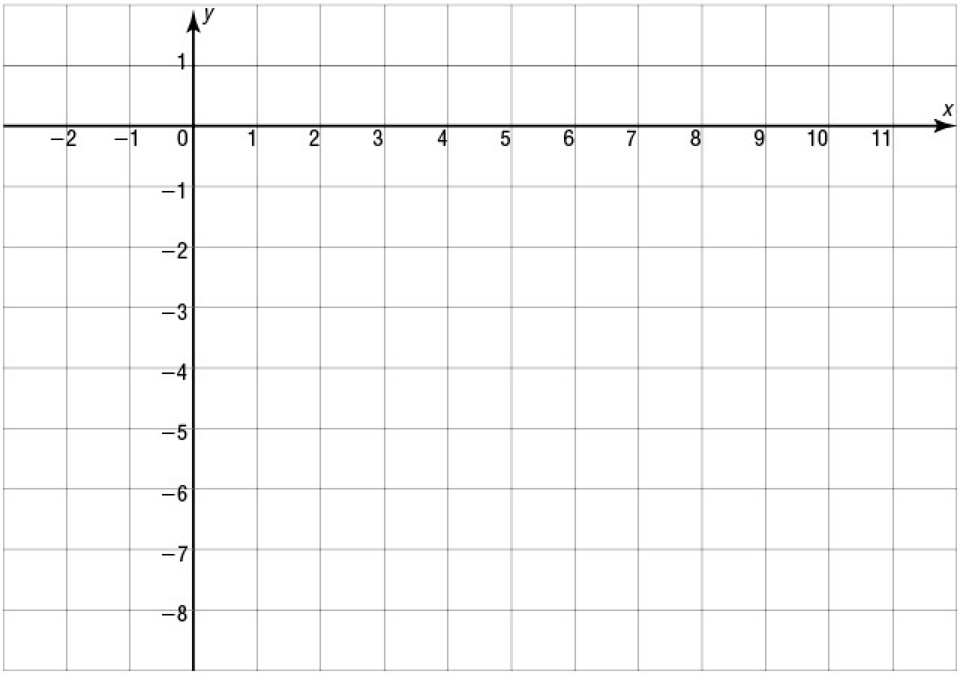
  II. Intersección con el eje y. Se sustituye $x = 0$ en la ecuación y se obtiene que $y =$ ______. Entonces la intersección es en el punto (0, ______).

- $2x + 4y = -2$

  I. Intersección con el eje x. Se sustituye $y = 0$ en la ecuación y se obtiene que $x =$ _____. Entonces la intersección es en el punto (_____, 0).

  II. Intersección con el eje y. Se sustituye $x = 0$ en la ecuación y se obtiene que $y =$ _____. Entonces la intersección es en el punto (0, _____).

b) Representen, con ayuda de una regla, en el sistema de ejes coordenados, la gráfica de la primera ecuación en color rojo, y la gráfica de la segunda, con azul.



2. Respondan en su cuaderno.

a) ¿Existe algún punto coordenado en donde ambas rectas de las ecuaciones se crucen o intersequen? ¿Cuál sería el punto?
b) ¿Qué valor del punto anterior corresponde a la incógnita x y qué valor corresponde a la incógnita y?
c) ¿El punto coordenado en común satisface a la primera y a la segunda ecuación?
d) ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones?

3. Analicen sus respuestas y determinen si éstas son correctas.

a) En caso necesario, hagan los ajustes pertinentes.
b) No olviden revisar la sección Infórmate anterior sobre la solución de un sistema de ecuaciones.

InfórMate

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método gráfico es necesario seguir los pasos que se describen a continuación:

1. Grafica cada una de las ecuaciones en un sistema coordenado. Estas gráficas siempre serán líneas rectas.

2. Encuentra el punto de intersección (x, y) de ambas rectas. En caso de existir, dicho punto será la solución del sistema de ecuaciones.

3. Comprueba que los dos valores cumplan el sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo: Resuelve el sistema de ecuaciones lineales 2×2 mediante el método gráfico.

$$\begin{cases} 8x - y = 11 & \text{Ecuación 1} \\ 4x + 3y = 23 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

1. Graficamos cada ecuación. Para hacer esto se determina el punto de intersección de cada ecuación con los siguientes ejes.

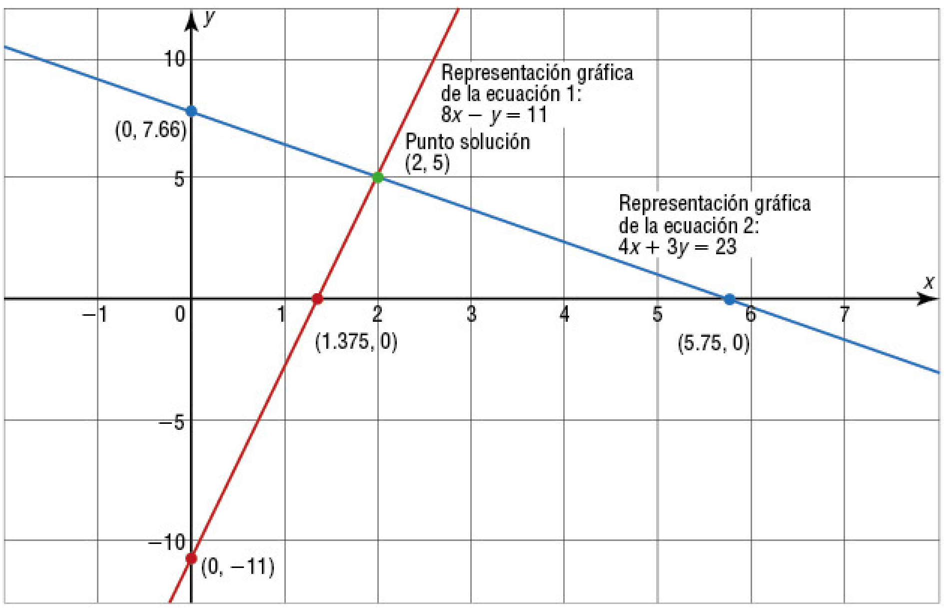
   Ecuación 1: Si $y = 0$, entonces $8x - (0) = 11$ y, por tanto, $x = \frac{11}{8} = 1.375$. El punto es $(1.375, 0)$.

   Si $x = 0$, entonces $8(0) - y = 11$ y, por tanto, $y = -11$. El punto es $(0, -11)$.

   Ecuación 2: Si $y = 0$, entonces $4x - 3(0) = 23$ y, por tanto, $x = \frac{23}{4} = 5.75$. El punto es $(5.75, 0)$.

   Si $x = 0$, entonces $4(0) + 3y = 23$ y, por tanto, $y = \frac{23}{3} = 7.\overline{6}$. El punto es $(0, 7.\overline{6})$.

   A continuación se muestra la representación gráfica de cada una de estas ecuaciones:



2. Observamos que ambas rectas se intersecan o coinciden en el punto $(2, 5)$, por lo que $x = 2$ y $y = 5$.

Relaciona

En primer grado de secundaria aprendiste que la pendiente de una recta se puede representar con la letra m y es un valor que indica la inclinación que tiene una recta. Así, si dos rectas tienen la misma pendiente, las rectas son paralelas.

3. Comprobamos que los valores anteriores satisfacen a las dos ecuaciones.

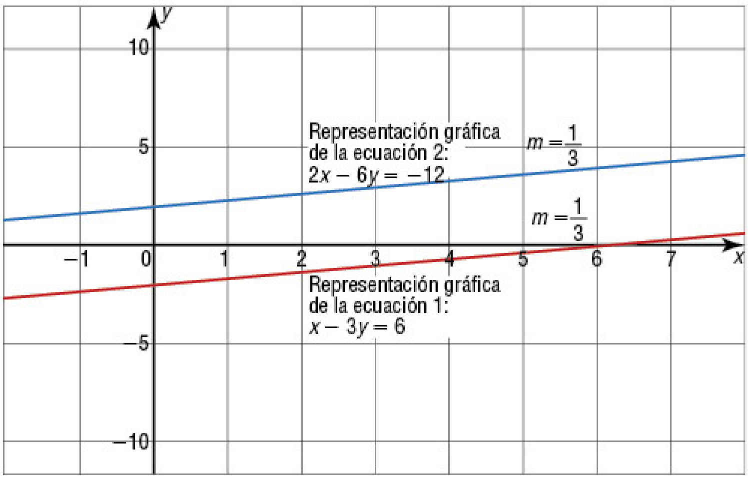
Ecuación 1: $8x - y = 11 \rightarrow 8(2) - (5) = 16 - 5 = 11$

Ecuación 2: $4x + 3y = 23 \rightarrow 4(2) + 3(5) = 8 + 15 = 23$

Por lo tanto, los valores $x = 2$ y $y = 5$ son la solución del sistema de ecuaciones.

El siguiente sistema de ecuaciones no tiene soluciones, pues no existe un punto de intersección de las rectas. Esto se debe a que las rectas son paralelas.

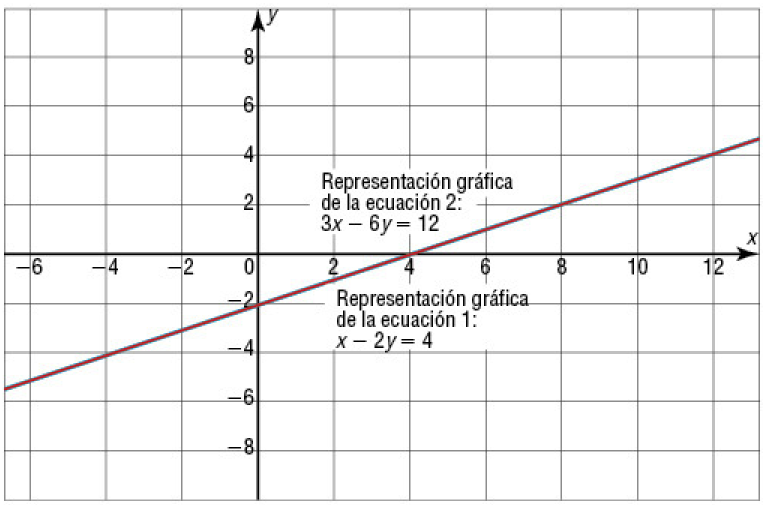
$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x - 6y = -12 \end{cases}$$



Como se observa en la gráfica. Cada recta tiene el mismo valor de pendiente o razón de cambio dada por $m = \frac{1}{3}$, por lo que resultan paralelas; sin embargo las intersecciones con el eje y de cada recta son distintas, estos valores se llaman "ordenada al origen".

Por su parte, el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, pues como se puede ver, las gráficas se sobreponen (una está encima de la otra). En otras palabras, tienen infinidad de puntos de intersección entre ellas.

$$x - 2y = 4$$
$$3x - 6y = 12$$



Ambas ecuaciones tienen el mismo valor de pendiente y misma ordenada al origen así que se encuentran "encimadas".

Esto sucede cuando una ecuación es un múltiplo de la otra. En este ejemplo se puede ver que la ecuación 2 se obtiene al multiplicar a la primera por 2.

Cualquier otra pareja (x, y) en el plano coordenado que no esté sobre las rectas no la satisfacen por lo que no será una solución del sistema.

Actividad 6

1. **Resuelvan los sistemas de ecuaciones por el método gráfico.**

   a) Utiliza papel cuadriculado o milimétrico para realizar las gráficas.

a) $\begin{array}{l} 4x+y=9 \\ 6x-y=1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x-2y=10 \\ 3x-6y=20 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2x+y=8 \\ 3x+4y=17 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} -2x+3y=5 \\ 4x-6y=-10 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} 3x+y=22 \\ 4x-3y=-1 \end{array}$

De interés

En tu curso de *Matemáticas 1* aprendiste a despejar una incógnita; por ejemplo, al despejar la incógnita x en la siguiente expresión:

$$2x - 3y = 4$$

Primero movemos el $-3y$ al lado derecho de la igualdad con la operación contraria, después pasamos el coeficiente 2 junto a la x al lado derecho con la operación contraria y quedaría así:

$$x = \frac{4+3y}{2}$$

2. **Completen la tabla de acuerdo con lo que observaron en las gráficas de los sistemas de ecuaciones del punto 1.**

	Sistema de ecuaciones lineales 2 × 2		
	Cuando no tiene solución	Cuando tiene una única solución	Cuando tiene infinidad de soluciones
¿Qué características geométricas pueden observar en las gráficas del sistema?	Son dos rectas paralelas.		
¿Qué características algebraicas pueden observar en las ecuaciones del sistema?		Tienen diferente valor de la pendiente m.	Son ecuaciones equivalentes.

3. **Comparen sus respuestas.**

   a) Analicen si las gráficas se trazaron correctamente.

   b) Comenten el procedimiento que siguieron y las dudas que surjan.

InfórMate

Es importante recordar que un **sistema de ecuaciones puede tener una única solución** (como en el ejemplo anterior), pero también **puede tener infinitas soluciones** o **no tener solución**.

Por ejemplo: el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 3x - 6y &= 12 \end{aligned}$$

tiene infinidad de soluciones. Por ejemplo, las parejas $x = 2$ y $y = -1$, $x = 0$ y $y = -2$, y $x = 4$ y $y = 0$ son soluciones. ¿Puedes encontrar más soluciones?

Por otro lado, el sistema:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 6 \\ 2x - 6y &= -12 \end{aligned}$$

no tiene solución, pues ninguna pareja de valores x y y satisface a las dos ecuaciones a la vez. Es posible que a una sí, pero a la otra no.

Método de sustitución

Actividad 7

1. **Lean el siguiente problema.**

   Actualmente la edad de un padre es el triple de la edad de su hijo; pero hace 15 años la edad del padre era 6 veces la edad que tenía el hijo. ¿Qué edades tienen actualmente el padre y el hijo?

2. **Planteen el sistema de ecuaciones que representa el problema. Nómbrenlas como Ecuación 1 y Ecuación 2.**

3. **Respondan en su cuaderno.**

   a) ¿Cuántas variables posee cada una de las ecuaciones? ____________

4. **Sigan los pasos indicados en cada inciso.**

   a) Seleccionen una variable en una de las ecuaciones y despéjenla.

   b) Realicen la sustitución de este despeje en la otra ecuación.

5. **Hallen el valor de la variable en la ecuación obtenida.**

a) ¿Qué representa el valor de esta variable? ______________________________

____

b) ¿Cómo se obtendría el valor de la otra variable?, ¿qué representa esta otra variable? ______________________________

____

c) Realicen el proceso para determinar este segundo valor.

d) Escriban estos dos valores obtenidos.

______ = ______ y ______ = ______

6. **Comprueben que las dos respuestas cumplen los requisitos del problema.**

a) Discutan si se obtendrían las mismas respuestas si se despejara la otra variable en una de las ecuciones y se realizara el mismo proceso.
b) Comprueben que esto se cumple en realidad.

7. **Comparen sus respuestas y respondan.**

a) ¿Por qué podemos sustituir el despeje de una variable en la otra ecuación sin que afectemos los valores de las variables?
b) Realicen un resumen del proceso llevado a cabo para llegar a la solución del sistema de ecuaciones.

InfórMate

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de sustitución se siguen los pasos que se indican en seguida.

1. Escoger una de las dos ecuaciones del sistema y despejar una incógnita de ella. Si es posible, escoger la incógnita que tenga coeficiente 1.
2. Sustituir el despeje anterior en la otra ecuación.
3. Hacer las operaciones necesarias para resolver la ecuación lineal de una sola variable que se obtiene.
4. Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso anterior, en el despeje realizado en el paso 1, y efectuar las operaciones para determinar el valor de la segunda incógnita.
5. Comprobar que estos dos valores cumplan el sistema de ecuaciones lineales original.

   Es importante, tal y como se describe en el paso 1, escoger en alguna de las dos ecuaciones la variable que tiene coeficiente 1, con el fin de que sea más sencillo el despeje y así agilizar los cálculos algebraicos.

Glosario

Coeficiente. Factor que se encuentra junto a una variable. Por ejemplo, en la expresión $3x$ el coeficiente es 3, y en la expresión $-y$ el coeficiente es -1.

Considera que las operaciones algebraicas que han de realizarse tras la sustitución del despeje en la otra ecuación. En caso de que exista denominador en la sustitución, se procede a multiplicar cada elemento de la ecuación por el mismo valor del denominador para que, tras realizar las operaciones, este denominador se elimine y resulte más sencilla la ecuación.

Ejemplo. Encontrar la solución del sistema por el método de sustitución.

$$2x + 3y = 13 \quad \text{Ecuación 1}$$
$$x - 4y = -10 \quad \text{Ecuación 2}$$

1. Despejamos la incógnita x de la segunda ecuación, pues su coeficiente es 1.

$x - 4y = -10$ Ecuación 1

$x = -10 + 4y$ Despeje 2

2. Sustituimos este despeje en la ecuación 1.

$2x + 3y = 13$ Ecuación 1

$2(-10 + 4y) + 3y = 13$ Sustitución de la incógnita x

3. Resolvemos la ecuación lineal obtenida.

$2(-10 + 4y) + 3y = 13$

$-20 + 8y + 3y = 13$

$8y + 3y = 13 + 20$

$11y = 33$

$y = \frac{33}{11}$

$y = 3$ Valor de la incógnita y

4. Sustituimos el valor de la incógnita obtenida en el despeje del paso 1.

$x = -10 + 4y$ Despeje

$x = -10 + 4(3)$ Sustituyendo el valor de y

$x = -10 + 12$

$x = 2$ Valor de la incógnita x

5. Realizamos la comprobación.

$2x + 3y = 13 \rightarrow 2(2) + 3(3) = 4 + 9 = 13$

$x - 4y = 10 \rightarrow (2) - 4(3) = 2 - 12 = -10$

Al cumplirse podemos afirmar que la solución al sistema de ecuaciones es $x = 2$ y $y = 3$.

Actividad 8

1. **Resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2 por el método de sustitución.**

a) $5x - y = 11$
$2x - 3y = -6$

$x =$ ______

$y =$ ______

b) $4x + 5y = -2$
$5x + 4y = 2$

$x =$ ______

$y =$ ______

2. **Intercambien sus resultados con otra pareja.**
   a) Revisen sus procedimientos.
   b) Compartan las dudas que surgieron e intenten resolverlas. Pueden consultar a su docente.

Método de igualación

Actividad 9

1. **Lean el siguiente problema. Anoten sus respuestas en su cuaderno.**

   La factura de un servicio telefónico consta de una renta mensual fija, la cual incluye 100 llamadas. Si se excede de las 100 llamadas se cobra un cargo extra por cada una de las llamadas adicionales. Si el mes pasado la factura fue de $320 al realizar 114 llamadas y este mes la factura es de $347 al realizar 132 llamadas, ¿cuál es el costo de la renta mensual y el costo adicional por llamada?

2. **Planteen el sistema de ecuaciones que representa al problema.**

3. **Respondan.**
   a) ¿Cuántas variables posee cada una de las ecuaciones?
   b) ¿Es posible despejar la misma variable en cada una de las dos ecuaciones sin que se obtengan divisores?, ¿cuál variable sería?

4. **Despejen la variable escogida en cada una de las ecuaciones.**

5. **Igualen la variable despejada y respondan.**
   a) ¿Cuántas variables tiene esta ecuación?
   b) ¿Qué tipo de ecuación se tiene ahora?

6. **Hallen el valor de la variable en la ecuación obtenida.**
   a) ¿Qué representa el valor de esta variable?
   b) ¿Cómo se obtendría el valor de la otra variable?, ¿qué representa esta otra variable?

7. **Determinen el valor de la segunda incógnita.**

8. **Comprueben que las dos respuestas cumplen los requisitos del problema.**

   a) Discutan si se obtendrían las mismas respuestas si se despejaran en ambas ecuaciones la otra variable y se realizara el mismo proceso.

   b) Comprueben que esto se cumple en realidad.

9. **Comparen sus respuestas y respondan.**

   a) ¿Por qué podemos igualar el despeje de una misma variable en las dos ecuaciones sin que afectemos los valores de las variables?

   b) Realicen un resumen del proceso llevado a cabo para llegar a la solución del sistema de ecuaciones.

InfórMate

Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de igualación se deben seguir los pasos que se indican a continuación.

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Si es posible, que sea la que tenga coeficiente 1 en al menos una de las ecuaciones.
2. Igualar los despejes anteriores.
3. Hacer las operaciones necesarias para resolver la ecuación lineal de una sola variable que se obtiene.
4. Sustituir el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de los dos despejes del paso 1 para encontrar el valor de la segunda incógnita.
5. Comprobar que estos dos valores satisfagan el sistema de ecuaciones original.

   En el paso 3 de este método es posible que, al igualar los dos despejes de la misma variable, se nos presente una igualación de dos fracciones. Para eliminar estos denominadores multiplicamos de manera cruzada estos valores y realizamos las operaciones algebraicas necesarias para obtener una ecuación lineal de una incógnita.

Ejemplo: Encontrar la solución del sistema por el método de igualación.

$$2x + 3y = 13 \quad \text{Ecuación 1}$$
$$x - 4y = -10 \quad \text{Ecuación 2}$$

1. Despejamos la incógnita x en ambas ecuaciones.

   $2x + 3y = 13$ Ecuación 1

   $2x = 13 - 3y$

   $x = \dfrac{13 - 3y}{2}$ Despeje

   $x - 4y = -10$ Ecuación 2

   $x = -10 + 4y$ Despeje

2. Igualamos ambos despejes.

   Como $x = \dfrac{13 - 3y}{2}$ y $x = -10 + 4y$, se tiene $\dfrac{13 - 3y}{2} = -10 + 4y$.

Y tú, ¿qué harías?

Es probable que hayas escuchado —por medio de tus abuelos o padres— que la conducta de los hijos era muy diferente en años pasados, ¿a qué aspectos crees que se refieren?

En tu caso, cuando a tus padres o tutores les pregunten acerca de tu conducta, ¿cuál crees que sea su respuesta? ¿Tú qué harías para cambiar esa opinión a tu favor?

3. Resolvemos la ecuación lineal obtenida.

$$\frac{13-3y}{2} = -10 + 4y$$

$$13 - 3y = 2(-10 + 4y)$$

$$13 - 3y = -20 + 8y$$

$$-3y - 8y = -20 - 13$$

$$-11y = -33$$

$$y = \frac{-33}{-11}$$

$y = 3$ Valor de la incógnita y

4. Sustituimos el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de los dos despejes del paso 1. Lo haremos en el despeje de la ecuación 2.

$x = -10 + 4y$ Despeje

$x = -10 + 4(3)$ Sustituyendo el valor de y

$x = -10 + 12$

$x = 2$ Valor de la incógnita

5. Realizamos la comprobación.

$2x + 3y = 13 \rightarrow 2(2) + 3(3) = 4 + 9 = 13$

$x - 4y = -10 \rightarrow (2) - 4(3) = 2 - 12 = -10$

Al cumplirse, podemos afirmar que la solución al sistema de ecuaciones es $x = 2$ y $y = 3$.

Actividad 10

1. Resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2 por el método de igualación.

a) $$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ x + 15y &= 24 \end{aligned}$$

$x =$ ____________

$y =$ ____________

b) $3x - 5y = 0$
$x - y = 4$

$x =$ ______

$y =$ ______

2. **Nombren a dos compañeros para que expongan a los otros equipos cómo resolvieron los sistemas.**

a) Escuchen atentamente los comentarios.
b) Si su docente lo considera, corrijan sus operaciones.

Método de suma y resta

Actividad 11

1. **Lean el siguiente problema.**

La suma de dos números es igual a 62 y el doble del número menor menos el número mayor es igual a 4.

¿Cuáles son los números?

2. **Planteen las ecuaciones del problema.**

3. **Ordenen las dos ecuaciones obtenidas de forma que a la izquierda de la igualdad se mantengan las variables en orden alfabético y a la derecha la constante.**

______ = ______
______ = ______

4. **Analicen los siguientes aspectos y respondan.**

a) Si se tiene que $a = b$, ¿se mantendrá la igualdad si sumamos la misma cantidad c en ambos lados, es decir se cumple que $a + c = b + c$?
b) ¿Se mantendrá la igualdad si se resta la misma cantidad, es decir, $a - c = b - c$?
c) Considerando lo anterior, ¿se conservará la igualdad si sumamos miembro a miembro dos igualdades? Es decir, si se tiene $a = b$ y $c = d$, ¿se cumple que $a + c = b + d$? ¿Por qué?

De interés

Cuando se tienen dos términos con una misma incógnita y exponente, podemos sumarlos o restarlos, y para ello sumamos los coeficientes de acuerdo con la regla de los signos para la suma y resta. La variable será la misma. Por ejemplo:

$4x + 6x = 10x$
$5y - 3y = 2y$
$7z - 11z = -4z$

5. **Consideren los puntos del numeral anterior para sumar miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas en el numeral 3.**

Ecuación 1 ______________________ = __________
+
Ecuación 2 ______________________ = __________

____

Resultado ______________________ = __________

a) ¿Qué sucede con una de las variables?
b) ¿Habría pasado lo mismo si se hubiera realizado la resta de las dos ecuaciones?, ¿por qué?
c) Entonces para que se pueda eliminar una variable es necesario que en ambas tengan el mismo ________________ pero distintos ________________.

6. **Hallen el valor de la variable que quedó en la ecuación que resultó de la suma de las ecuaciones.**

7. **Obtengan el valor de la variable restante.**

8. **Comprueben que las dos respuestas cumplen los requisitos del problema.**

9. **Comparen sus respuestas y respondan.**
a) ¿Por qué podemos igualar sumar las ecuaciones sin que afectemos los valores de las variables?
b) Realicen un resumen del proceso llevado a cabo para llegar a la solución del sistema de ecuaciones.

InfórMate

Para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de suma y resta se deben seguir los pasos que se describen a continuación:

1. Determinar si al sumar los términos correspondientes de las ecuaciones se elimina alguna variable.
2. Si se elimina la variable, pasa al punto 3, en caso contrario escoge una incognita a eliminar.

   Para eliminarla es necesario multiplicar las ecuaciones de la siguiente forma:

   Coeficiente de la incógnita a eliminar de la ecuación 2 por la Ecuación 1
   Coeficiente de la incógnita a eliminar de la ecuación 1 por la Ecuación 2

   Colocar el signo apropiado en los valores de los coeficientes para que los coeficientes de incógnita a eliminar queden de signos contrarios.
3. Sumar los términos correspondientes de las dos ecuaciones quedando una ecuación lineal.
4. Resolver la ecuación lineal de una sola variable que se obtuvo.

5. Sustituir el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las otras dos ecuaciones para encontrar el valor de la segunda.

6. Comprobar que estos dos valores satisfagan el sistema de ecuaciones original.

   Es importante escoger los valores apropiados que multiplicarán a las ecuaciones, como se indica en el punto 1, ya que éste es el paso más importante de este método.

Ejemplo: Hallar la solución del sistema por el método de suma y resta.

$$\begin{array}{rl} 2x+3y=13 & \text{Ecuación 1} \\ x-4y=-10 & \text{Ecuación 2} \end{array}$$

1. Eliminaremos la incógnita y en ambas ecuaciones. Los coeficientes de esta incógnita en las dos ecuaciones son 3 y -4.

   Hacemos las multiplicaciones:

$$\begin{gathered} (\text{Coeficiente } y \text{ de la ecuación 2}) \times (\text{Ecuación 1}) \\ (-4)(2x+3y=13) \\ -8x-12y=-52 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (\text{Coeficiente } y \text{ de la ecuación 1}) \times (\text{Ecuación 2}) \\ (3)(x-4y=-10) \\ 3x-2y=-30 \end{gathered}$$

   Vemos que los coeficientes de la incógnita y a eliminar quedaron del mismo signo, pero deben quedar de signo contrario; así que cambiamos el signo del coeficiente -4 a 4 y hacemos de nuevo la multiplicación en la ecuación 1.

$$\begin{gathered} (4)(2x+3y=13) \\ 8x+12y=52 \end{gathered}$$

2. Sumamos las partes correspondientes de las dos ecuaciones multiplicadas.

$$\begin{array}{ll} 8x+12y=52 & \text{Ecuación 1 modificada} \\ \underline{3x-12y=-30} & \text{Ecuación 2 modificada} \\ 11x+0y=22 & \text{Suma de las ecuaciones (ecuación lineal)} \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación lineal obtenida.

   $11x=22$

   $x=\frac{22}{11}$

   $x=2$ Valor de la incógnita x

PARA TIC

Utiliza el siguiente portal para repasar los procedimientos para resolver ecuaciones lineales. Esto te ayudará a resolver los sistemas de ecuaciones lineales.

https://bit.ly/2uoy3KQ

(Consulta: 25 de marzo de 2018).

4. Sustituimos el valor de la incógnita que conocemos en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

   Lo haremos en la primera:

$2x + 3y = 13$	Ecuación 1
$2(2) + 3y = 13$	Sustitución
$4 + 3y = 13$	
$3y = 13 - 4$	
$3y = 9$	
$y = \frac{9}{3}$	
$y = 3$	Valor de la incógnita y

5. Realizamos la comprobación.

$$2x + 3y = 13 \rightarrow 2(2) + 3(3) = 4 + 9 = 13$$
$$x - 4y = -10 \rightarrow (2) - 4(3) = 2 - 12 = -10$$

Al cumplirse podemos afirmar que la solución al sistema de ecuaciones es $x = 2$ y $y = 3$.

Actividad 12

1. **Resuelvan cada sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de suma y resta.**

a) $2x + y = 8$
   $x + 2y = 7$

   $x =$ ____________

   $y =$ ____________

b) $2x - y = 3$
   $x + y = 6$

   $x =$ ____________

   $y =$ ____________

PARA TIC

¿Se te dificultan las matemáticas? Lo mismo le pasaba a Alicia, hasta que un extraño personaje lo llevo al país de los números, ¿quieres saber lo que descubrió? Visita la página en donde podrás leer el libro *Malditas matemáticas*. Alicia en el país de los números de Carlos Frabetti.

https://bit.ly/1O4KTNf

(Consulta: 15 de junio de 2018).

2. **Intercambien sus resultados con otra pareja.**

a) Expliquen a sus compañeros cómo resolvieron sus sistemas.
b) Comenten sus dificultades y cómo las solucionaron.
c) Consulten con su docente en caso de seguir con dudas.

Actividad 13

1. **Determinen cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones tienen una solución única, infinitas soluciones o ninguna.**

a) En caso de que tenga una solución única calcúlenla con uno de los métodos vistos.

- $$\begin{aligned} x - y &= -2 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

- $$\begin{aligned} 4x - 3y &= 7 \\ 8x - 6y &= 14 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

- $$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

- $$\begin{aligned} 6x + 5y &= 8 \\ 12x + 10y &= -13 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

- $$\begin{aligned} x-2y&=6 \\ 2x+3y&=22 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

- $$\begin{aligned} x+4y&=8 \\ 6x+24y&=48 \end{aligned}$$

Cantidad de soluciones: ______

$x =$ ______

$y =$ ______

2. Elijan a dos compañeros para que expongan al grupo cómo resolvieron los sistemas que tuvieron una única solución.

a) Expliquen porqué eligieron ese método para resolverlos.
b) Comenten las dificultades que tuvieron con los diferentes métodos.
c) Propongan soluciones para las dificultades que enfrentaron otros compañeros.

Aplicación a problemas

Actividad 14

1. Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno utilizando el método que consideren más conveniente.

a) En una feria se puede comprar un boleto para subirse a todos los juegos mecánicos las veces que se quiera. Dicho boleto tiene un costo de 300 pesos para los adultos y de 195 pesos para los niños. Si en un día se venden 250 boletos y por esta venta se obtuvieron 56 100 pesos, ¿cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se vendieron ese día?
b) Un granjero tiene entre gallinas y conejos 19 animalitos en perfecto estado físico. Si en total la suma de las patas de los animalitos es 52, ¿cuántas gallinas y cuántos conejos tiene el granjero?
c) Miguel tenía 12 monedas, algunas de 5 pesos y otras de 10 pesos. Si con esas 12 monedas pudo pagar una memoria USB que costó 105 pesos sin que le sobrase nada, ¿cuántas monedas de 5 pesos y cuántas de 10 pesos tenía Miguel?

d) En una bodega automotriz hay botes de aceite de 2 y de 5 litros. Si en total hay 1 000 litros de aceite repartidos en 323 de esos botes, ¿cuántos botes de 2 y cuántos de 5 litros hay?

e) Al comprar en una papelería cinco libretas y cuatro lápices, María pagó 188 pesos. Sin embargo, Jade compró, en el mismo lugar, seis libretas y cinco lápices como los de María, pagando 227 pesos. ¿Cuánto cuesta cada libreta y cuánto cada lápiz en esa papelería?

f) Guadalupe acude a la tienda y compra tres cajitas de jugo y siete galletitas de avena por un total de 50 pesos. Su hermanita acude también a la misma tienda y compra dos cajitas del mismo jugo y seis galletitas de avena, pagando en total 36 pesos. ¿Cuánto vale cada cajita de jugo y cuánto cada galletita de avena?

g) La suma de dos números es 25 y la diferencia del mayor con el menor es 15. ¿Cuáles son los números?

h) La base de un rectángulo es el triple de su altura. Si su perímetro es 24 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

i) Una playera y una taza del concierto de mi grupo favorito me costaron 300 pesos, Si la playera hubiera costado 40 pesos menos y la taza 20 pesos más, ambos costarían lo mismo. ¿Cuánto pagué por cada objeto?

2. Presenten a los otros equipos el procedimiento que siguieron para la solución de uno de los problemas.

a) Comparen si los sistemas de ecuaciones son similares.

b) Determinen si realizaron adecuadamente los pasos del método empleado.

c) Comenten en qué casos tuvieron dificultades y como las solventaron.

d) Realicen los ajustes oportunos para llegar al planteamiento y/o solución correcta.

InfórMate

Cuando sea necesario que plantees un sistema de ecuaciones 2×2 puedes seguir las sugerencias que se indican a continuación:

- Comprende y analiza la situación planteada para determinar las dos cantidades que se deben encontrar.
- Representa cada una de esas cantidades con una incógnita.
- Identifica las dos partes de la situación en donde cada una te relacionará a las dos incógnitas, de manera que plantees una ecuación por cada relación que encuentres en el problema.
- Ordena las ecuaciones y resuelve el sistema de ecuaciones lineales 2×2 generado. Puedes elegir el método que más te convenga.
- Comprueba que la solución cumple con lo indicado en el enunciado del problema.

Pausa en el camino

Actividad 15

1. **Lean el siguiente problema.**

   Xóchitl dice a su amiga María: "la cantidad de dinero en pesos que yo tengo es el doble de lo que tú tienes"; pero María le contesta: "si tú me dieras 6 pesos de lo que tienes, entonces ambas tendríamos la misma cantidad de dinero". ¿Qué deben encontrar en este problema?

2. **Escriban las dos partes del problema que servirán para generar las ecuaciones.**

   a) Consideren las variables que utilizarán para representar las ecuaciones y a su vez, qué representará cada una. ________________

3. **Escriban las dos ecuaciones que surgen de cada parte del problema con el uso de las variables descritas antes.**

   a) Elijan y escriban dos métodos de resolución para resolver el sistema de ecuaciones 2 3 2 creado ________________

4. **Resuelvan por uno de los métodos vistos los siguientes problemas. Comprueben sus soluciones.**

   a) El problema de la Actividad 2, numeral 1
   b) El problema de la Actividad 3, numeral 1

5. **Identifica cuál de los problemas presentados en la Actividad 4 numeral 2, se resolverían con un sistema de ecuaciones.**

   a) En caso de serlo resolverlos.

6. **Presenten sus respuestas a sus demás compañeros.**

   a) Comenten las variables que emplearon en cada ecuación.
   b) Verifiquen que se obtuvieron las mismas respuestas.
   c) Apóyense entre sí para resolver dudas y si persisten soliciten apoyo a su docente.

Pasos firmes

Terminaste un trimestre y es tiempo de dar pasos firmes para continuar con tu camino.

1. Contesta las preguntas del siguiente esquema.

¿Cuáles fueron mis aprendizajes?

¿Qué dificultades enfrenté para lograr mis aprendizajes?

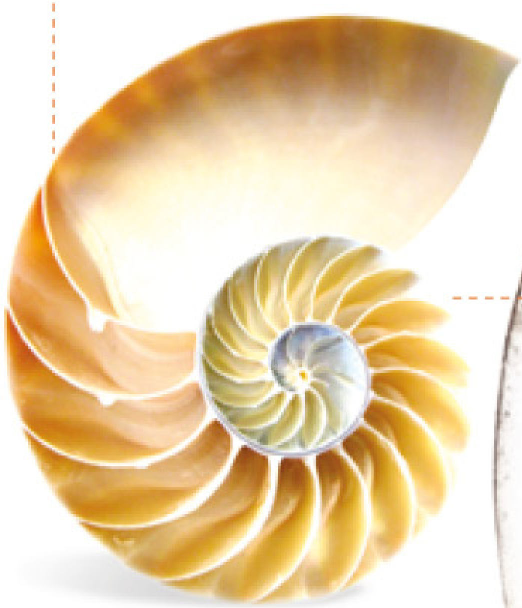
¿Qué puedo hacer para solucionar las dificultades que enfrenté?

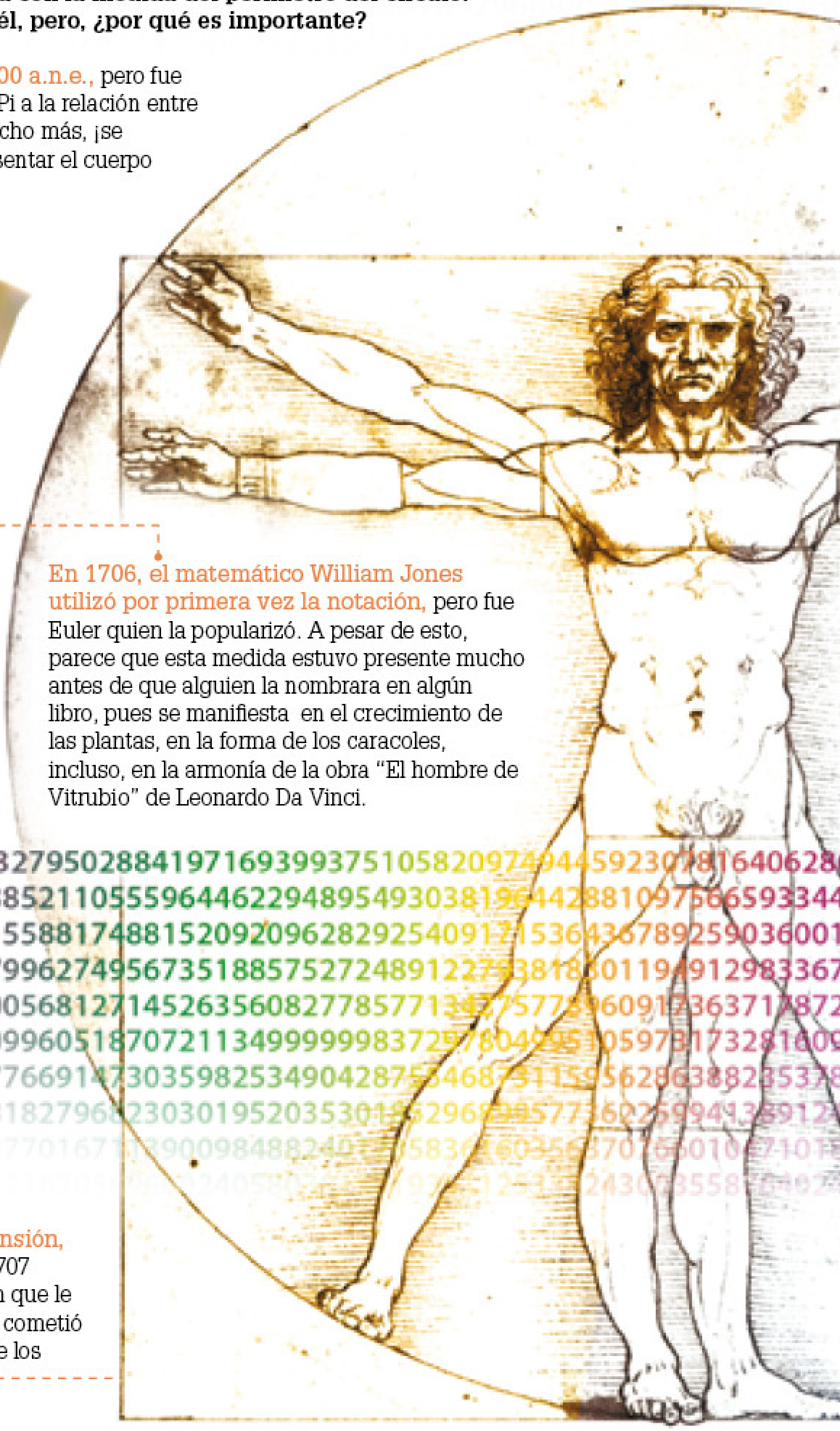
¿Cómo puedo utilizar mis aprendizajes en mi vida cotidiana?

Entre el orden y el caos: Pi

3.1416, ¿te recuerda algo? El Pi se relaciona con la medida del perímetro del círculo. Seguramente has escuchado hablar sobre él, pero, ¿por qué es importante?

Se tiene evidencia del Pi en Egipto hace 1 600 a.n.e., pero fue hasta el siglo XVII que se designó con el nombre Pi a la relación entre el contorno y el radio de los círculos, pero es mucho más, ¡se considera el número de la belleza!, esto al representar el cuerpo geométrico más perfecto.



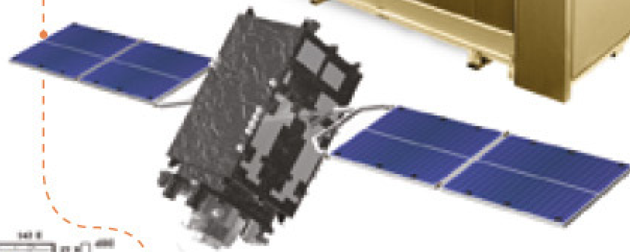


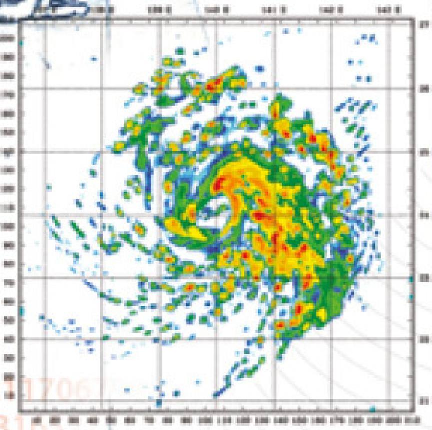
En 1706, el matemático William Jones utilizó por primera vez la notación, pero fue Euler quien la popularizó. A pesar de esto, parece que esta medida estuvo presente mucho antes de que alguien la nombrara en algún libro, pues se manifiesta en el crecimiento de las plantas, en la forma de los caracoles, incluso, en la armonía de la obra "El hombre de Vitrubio" de Leonardo Da Vinci.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628
594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334
0726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001
8193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367

Una característica del número Pi es su extensión, de hecho, el matemático inglés obtuvo más de 707 decimales de este número, en una investigación que le llevo ¡casi 20 años!, aunque después se vio que cometió un error en el decimal 528, por lo cual el resto de los números era incorrecto, ¡vaya error!

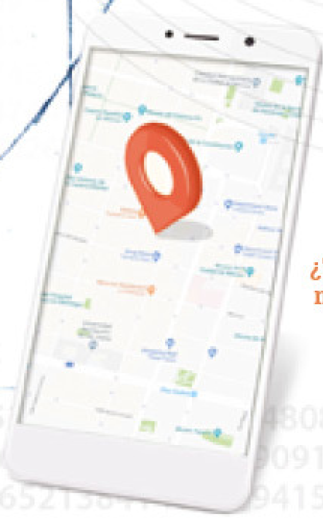
En 1957 se empleó una computadora, que por cierto, eran sumamente diferentes a lo que conoces ahora, que pudo calcular 7840 decimales, en 1961, con ayuda de una computadora IBM, se lograron encontrar 100 000 decimales, **¿recuerdas haber contado algo tan extenso?**



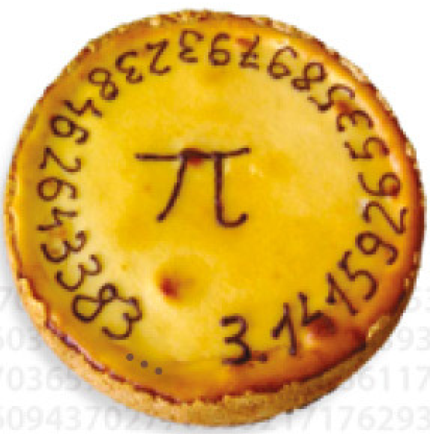


Pero, ¿para qué nos sirven estos decimales de Pi? Pues bien, el cálculo de estos permite dar paso a infinidad de aplicaciones, como simulaciones de fenómenos naturales, diseño de aparatos, para lograr que un teléfono móvil se conecte a una torre de comunicación y utilizar el GPS en la localización, en estudios genéticos, ¡hasta para crear música!

El 14 de marzo de 1988 se celebró por primera vez el Día Mundial del Número Pi que celebran, sí, con pasteles en forma de círculo. Incluso, en 1998, se estrenó una película basada en este número "Pi, el orden del caos", en donde un científico encuentra mucho más de lo que espera encontrar.



¿Te atreves a indagar más sobre el número Pi? Inténtalo, pues quizás seas tú quien descubra una nueva aplicación de este número.



Lee con atención y subraya la respuesta correcta.

1. Lourdes vendió $\frac{2}{5}$ partes de un terreno de cultivo y sembró zanahorias en $\frac{2}{3}$ partes del terreno restante. ¿Qué parte del terreno original se utilizó para sembrar con zanahorias?

   a) $\frac{3}{5}$

   b) $\frac{2}{5}$

   c) $\frac{1}{5}$

   d) $\frac{3}{10}$

2. Juan empacó 22 bolsas con dulces. Si cada bolsa contiene 50 dulces y cada dulce pesa 5.75 gramos, ¿cuántos kilogramos pesan las 22 bolsas?

   a) 0.6325 kg
   b) 63.25 kg
   c) 6 325 kg
   d) 6.325 kg

3. El resultado de $\dfrac{0.25 \times \frac{5}{6}\left(-\frac{4}{7}\right)}{\frac{3}{4}}$ es…

   a) $\frac{19}{63}$

   b) $-\frac{10}{63}$

   c) $\frac{21}{63}$

   d) $-\frac{19}{63}$

4. ¿Cuál es el área de un triángulo de base 45.6 cm y altura $\frac{24}{5}$ cm?

   a) $\frac{2\,736}{25}$ cm^2

   b) 110.44 cm^2

   c) 109 cm^2

   d) $\frac{2\,745}{25}$ cm^2

5. La potencia $\left(\frac{5}{7}\right)^{-6}$ equivale a…

   a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{6}$

   b) $\dfrac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{6}}$

   c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{6}$

   d) $\dfrac{1}{\frac{5^6}{7}}$

6. **Una aproximación más cercana de $\sqrt{10}$ es…**

a) 3.14
b) 3.16
c) 3.15
d) 3.18

7. **¿Cuál de las siguientes situaciones es de proporcionalidad inversa?**

a) El costo de unos lápices y la cantidad que se compra.
b) La cantidad de agua que cae en un recipiente desde una llave y el tiempo que tarda dicha llave abierta.
c) La cantidad de gasolina que consume un vehículo y la distancia recorrida por dicho vehículo.
d) El tiempo que tardará un autobús en ir de una ciudad a otra, si hace el recorrido a diferentes velocidades.

8. **Se sabe que 20 becerros comen el alimento que hay en una granja en 10 días. ¿Cuánto tiempo tardarán ocho becerros en acabarse la misma cantidad de alimento?**

a) 11
b) 13
c) 14
d) 12

9. **¿Cuál sistema de ecuaciones 2 × 2 representa la situación dada a continuación?**

Un padre tiene el triple de la edad actual de su hijo. Si el padre tuviese 30 años menos y el hijo ocho años más, los dos tendrían entonces la misma edad.

a) $$\begin{aligned} x &= 3y \\ y - 30 &= x + 8 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x &= 3y \\ x - 30 &= y + 8 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x &= 3y \\ x + 30 &= y - 8 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} y &= 3x \\ x - 30 &= y + 8 \end{aligned}$$

10. **¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones?**

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 3x + y &= -4 \end{aligned}$$

a) $x = -1, y = 1$
b) $x = 2, y = -2$
c) $x = 3, y = 2$
d) $x = -2, y = 2$

Trimestre II

Ejes

- Número, álgebra y variación
- Forma, espacio y medida

Temas

- Funciones
- Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
- Figuras y cuerpos geométricos
- Magnitudes y medidas

LECCIÓN 6

¿Cómo cambian los cambios?

Tema Funciones

Aprendizaje esperado

- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

LECCIÓN 7

Visto desde otra óptica

Tema Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Aprendizaje esperado

- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

LECCIÓN 8

Operaciones con letras

Tema Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Aprendizaje esperado

- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

La matemática nos ayudan en la resolución de situaciones cotidianas y a generar nuevos aprendizajes, pero lo más importante es que nos ayuda a concebir métodos propios para resolver problemas, ya que no existe una sola forma de hacerlo. En este trimestre nos enfocaremos en las funciones de variación lineal para solucionar problemas de diversas áreas; asimismo, observaremos las equivalencias algebraicas con las geométricas mediante perímetros y áreas; analizaremos los ángulos de polígonos regulares y realizaremos conversiones de medidas a otros sistemas.

LECCIÓN 9

Mosaicos con triángulos

Tema Figuras y cuerpos geométricos

Aprendizaje esperado

- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

LECCIÓN 10

Correr un kilómetro o mil metros, ¡qué dilema!

Tema Magnitudes y medidas

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos de metro, litro y kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Funciones

¿Cómo cambian los cambios?

Aprendizaje esperado: Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean la siguiente información. Posteriormente respondan las preguntas.

Se hace un estudio para analizar el comportamiento del motor de un automóvil a diferentes velocidades. Para efectuar este análisis, el automóvil debe recorrer en cada prueba 350 km en diferentes tiempos y a diferentes velocidades promedio. Se sabe que la relación entre velocidad, distancia y tiempo está dada por $v = \frac{d}{t}$.

De interés

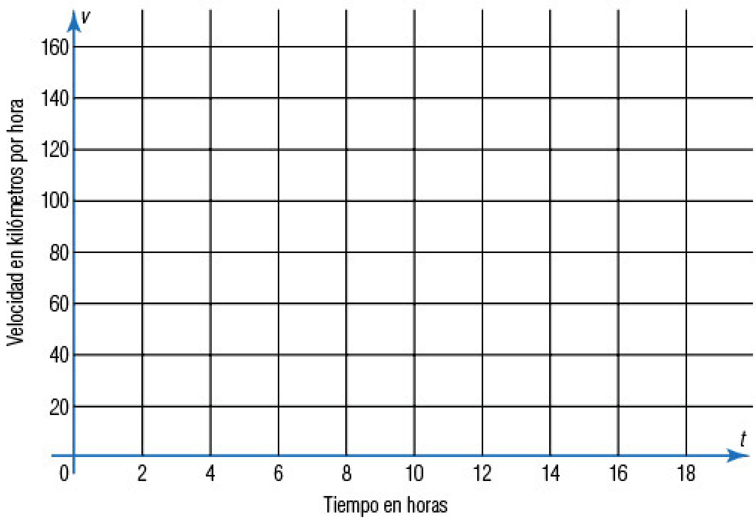
Recuerden que ya han visto en su curso de *Matemáticas 1* la forma de representar puntos (x, y) en el plano. Esto te será de utilidad en lo que resta de la lección.

a) Completen la siguiente tabla para determinar la velocidad promedio a la que debe desplazarse el automóvil para recorrer los 350 km en el tiempo indicado.

Tiempo (t)	2 h	4 h	6 h	8 h	10 h	12 h	14 h	16 h	18 h
Velocidad (v)	175 km/h								

b) Grafiquen los puntos de la tabla anterior y respondan, en su cuaderno, los siguientes cuestionamientos.

- ¿La gráfica es una línea recta?, ¿a qué creen que se deba?
- ¿La velocidad del automóvil y el tiempo son proporcionales? Justifiquen su respuesta.



2. Analicen las respuestas de algunas parejas y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Revisen si aplicaron correctamente la fórmula de la velocidad y si se ubicaron correctamente los puntos en el plano cartesiano.

Ruta del saber

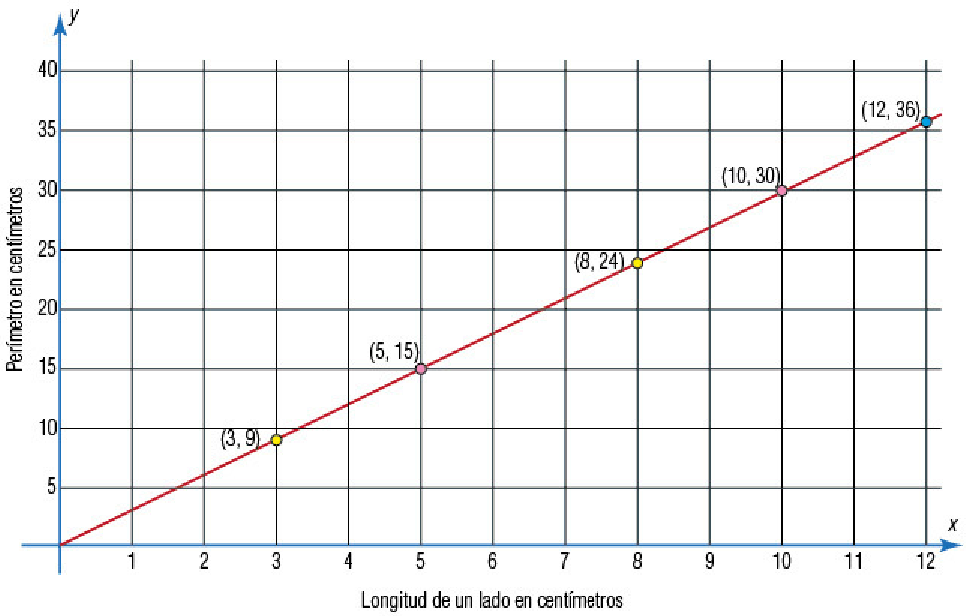
Análisis de gráficas de variación lineal

Lenguaje algebraico

Actividad 2

1. **Lean la siguiente información. Posteriormente respondan las preguntas.**

   La gráfica representa cómo cambia el perímetro (eje *y*) de un polígono regular (todos sus lados miden lo mismo) de acuerdo con la medida, en centímetros, de la longitud de sus lados (eje *x*).



a) ¿Cuánto mide el perímetro de la figura cuando sus lados miden 5 cm? _____

b) ¿Cuánto mide el perímetro de una figura cuando sus lados miden 10 cm? _____

c) Si el lado de la figura aumenta de 3 a 5 cm, ¿cuánto aumenta el perímetro? _____

d) Si el lado de la figura aumenta de 8 a 10 cm, ¿cuánto aumenta el perímetro? _____

e) Si el perímetro de la figura es de 36 cm, ¿cuánto miden sus lados? _____

f) ¿Es posible determinar qué forma tiene el polígono regular que genera la gráfica anterior? ¿Cuál es? _____

g) Escriban la representación algebraica que corresponde con la gráfica anterior considerando a la variable *y* como el perímetro y a la variable *x* como la longitud del lado conocido. _____

Relaciona

El lenguaje algebraico es un tema que trabajaste desde el año pasado. Puedes revisar la lección 8 del libro *Matemáticas* de primer grado de secundaria, para repasar tus conocimientos.

h) ¿El perímetro de la figura y la medida de su lado representa una relación de proporcionalidad directa? Justifiquen su respuesta. ______

______

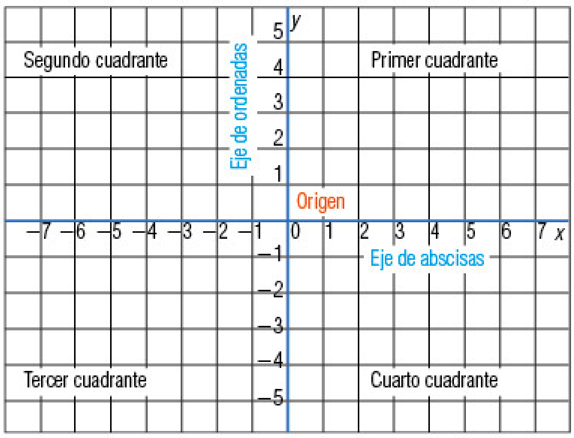
______

2. Comparen sus resultados con los de sus demás compañeros y establezcan cuáles son las características que tienen todas las gráficas de proporcionalidad directa.

a) En caso de que no coincidan sus respuestas y no lleguen a un acuerdo, consulten a su docente y entre todos obtengan una conclusión satisfactoria.

InfórMate

El sistema de ejes coordenados es un arreglo de ejes horizontal y vertical utilizado para representar puntos en el plano.



Actividad 3

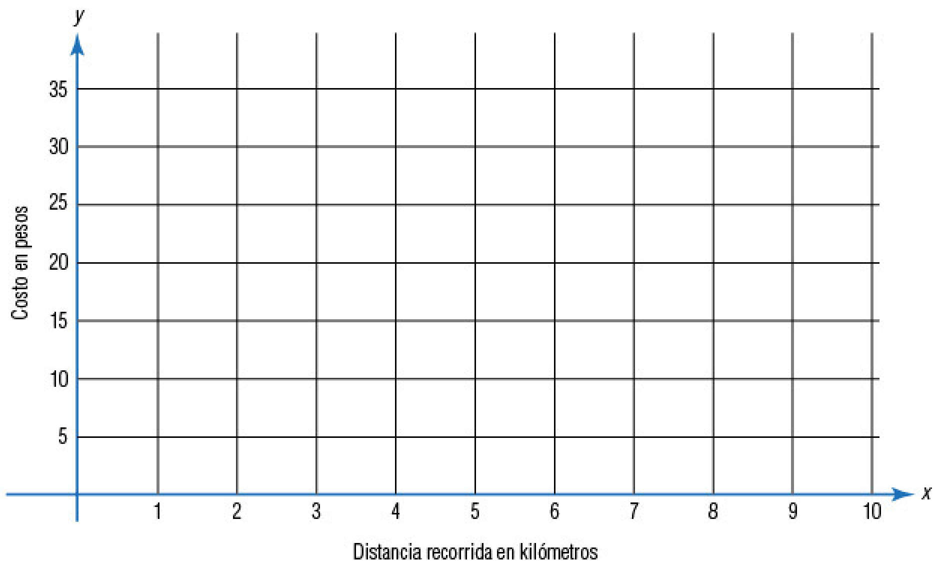
1. Lean la siguiente información. Posteriormente realicen lo que se les pide.

El costo por un viaje en taxi se compone de la siguiente forma: El banderazo tiene un costo de 5 pesos y por cada kilómetro recorrido se cobran 4 pesos.

a) Completen la siguiente tabla.

Distancia recorrida en kilómetros	Costo en pesos
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
8.5	

b) Representen los datos en el siguiente sistema de coordenadas.



PARA TIC

Para elaborar las gráficas de diversas funciones y puntos, pueden utilizarse diversos softwares, entre ellos destaca "Graphmática", que se puede descargar de manera libre en la siguiente página:

https://bit.ly/2kUmvde

(Consulta: 29 de marzo de 2018).

2. Contesten los siguientes planteamientos empleando la información de la tabla y la gráfica anteriores.

a) Si una persona aborda el taxi y viaja 15 km, ¿cuánto pagará por el servicio? ___

b) Si una persona aborda el taxi y viaja 4.2 km, ¿cuánto pagará por el servicio? ___

c) Si una persona que abordó el taxi pagó 85 pesos, ¿cuántos kilómetros viajó? ___

d) ¿Cuál es la representación algebraica de la situación? ___

e) ¿Cuánto vale la pendiente de la gráfica y cuánto su ordenada al origen?

- Pendiente $m =$ ___
- Ordenada al origen $b =$ ___

f) ¿El costo del viaje y los kilómetros recorridos representan una relación de proporcionalidad directa? Justifiquen su respuesta. ___

3. Analicen la tabla, la gráfica y las respuestas de otro equipo y contrástenlas con las suyas.

4. Determinen si se obtuvieron las mismas respuestas y cuáles son correctas.

5. Compartan sus conclusiones. Pongan atención en los siguientes puntos:

a) Para llenar la tabla ¿consideraron el valor del banderazo?
b) ¿La gráfica es una línea recta o una curva?
c) ¿La gráfica pasa por el origen?
d) Si no viaja kilómetros completos, ¿cómo obtienen el precio que pagará el cliente?

InfórMate

La función lineal relaciona dos variables tales que al tomar sus valores en dos momentos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la siguiente razón siempre es constante:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Además, su gráfica siempre es una línea recta y el valor de m es la pendiente de dicha recta. Por tanto, se cumple lo siguiente:

- Si $m > 0$, la gráfica es creciente.
- Si $m < 0$, la gráfica es decreciente.
- Si $m = 0$, la gráfica es una línea horizontal.

Por otra parte, la ecuación de la función lineal es de la forma:

$$y = mx + b$$

Donde b es el valor en el que la recta corta al eje y, es decir, b es la ordenada al origen.

Cuando sucede que la recta que representa a la función lineal pasa por el origen del plano cartesiano, es decir, $b = 0$, la ecuación de la función lineal es de la forma:

$$y = mx \left(\text{o } \frac{y}{x} = \text{m}\right)$$

Por tanto, la función lineal representa a una función de proporcionalidad directa y la pendiente es la constante de proporcionalidad. Así, siempre que una situación se represente por una recta que pasa por el origen, las variables o magnitudes de esa situación estarán en proporcionalidad directa.

Por ejemplo, la situación de la actividad 2 es de proporcionalidad directa, pero la situación de la actividad 3 no es de proporcionalidad directa. Sin embargo, en ambos casos se tienen funciones lineales cuyas gráficas son líneas rectas.

Variación inversa

Función de proporcionalidad inversa

Actividad 4

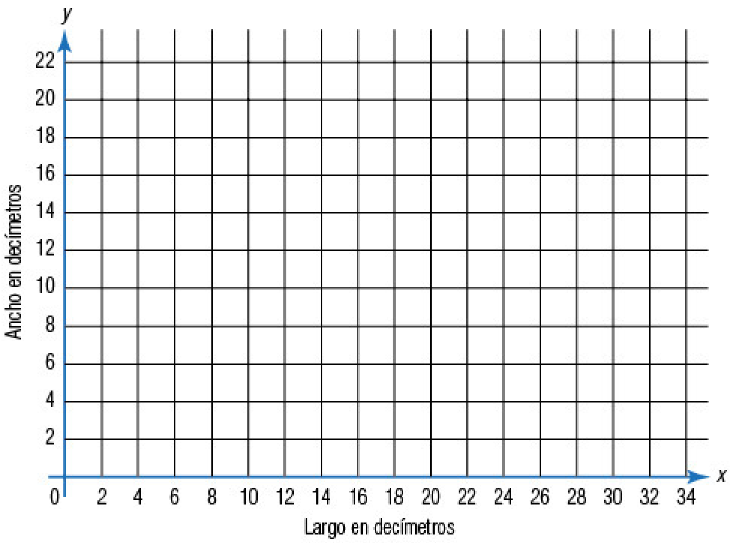
1. **Lean la siguiente información. Posteriormente realicen lo que se les pide.**

Un carpintero desea saber qué medidas deben tener los lados de una mesa rectangular si su área será de 36 dm^2. Recuerden que dm es la notación para decímetros.

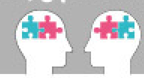
a) Completen la siguiente tabla con algunas propuestas de las medidas que puede tener la mesa.

Largo en decímetros	Ancho en decímetros	Área (dm^2)
2		
3		
	8	
8		
	3	
18		

b) Representen los valores de la tabla anterior en el siguiente sistema de coordenadas.



Y tú, ¿qué harías?



Imagina que vas de excursión con tus compañeros y te presionan para hacer algo indebido. ¿Qué harías? Es importante tener convicciones firmes y evitar hacerte daño a ti o a terceros, pues un amigo, ante todo, también busca tu bienestar.

2. Contesten los siguientes planteamientos empleando la información de la tabla y la gráfica anteriores.

a) ¿Los puntos de la gráfica deben unirse con rectas o con curvas? Argumenten su respuesta. ______________________________

____

b) En las dos actividades anteriores, las gráficas eran líneas rectas. ¿Esta también es una línea recta?, ¿a qué creen que se deba? ______________________________

____

____

c) Si se representa con la variable x al valor del ancho de la mesa y con la variable y al valor del largo de la misma, ¿cómo se representa algebraicamente la relación entre el ancho y el largo de la mesa para que su área siempre sea 32?

____

3. Preparen una breve exposición de sus resultados.

4. Presenten sus resultados y compárenlos con los de otros equipos. No olviden justificar sus respuestas cuando algún compañero les haga alguna pregunta.

a) Realicen preguntas para corroborar su comprensión.
b) Si alguno de sus compañeros tiene dudas, ayúdenlo.

Actividad 5

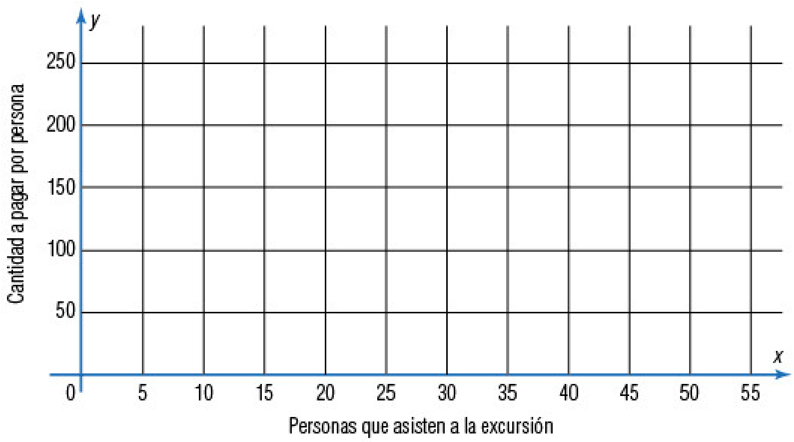
1. **Lean la siguiente información y analicen los datos de la tabla.**

Los alumnos de segundo año de secundaria harán un viaje de excursión a una reserva ecológica. Para ello el colegio contrató un autobús de 40 asientos. El costo de la renta se dividirá en partes iguales entre los asistentes a la excursión. En la tabla se ejemplifica lo que deberá pagar cada persona de acuerdo con el número de asistentes.

Personas que asisten a la excursión (x)	10	15	20	25	30	35	40
Cantidad a pagar por persona (y)	210	140	105	84	70	60	52.5

2. **Respondan las preguntas con base en la información anterior.**
   a) Si a la excursión asisten 28 personas, ¿cuánto deberá pagar cada una? ______
   b) Y si asisten 32 personas, ¿cuánto deberán pagar cada una? ______
   c) ¿Cuánto cuesta la renta del autobús? ______
   d) ¿Qué pasa con el costo a pagar por persona mientras más asistan al viaje? ______

3. **Representen en el siguiente sistema coordenado la gráfica de los datos de la tabla y respondan la pregunta.**



   a) ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular la cantidad a pagar por cada persona de acuerdo con el número de éstas que asistan a la excursión? ______

4. **Intercambien sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron. ¿Todos obtuvieron la misma gráfica y la misma expresión matemática?**

a) Identifiquen las respuestas correctas y corrijan de ser necesario.

Actividad 6

1. **Respondan lo que se pide en cada situación.**

a) Un albañil tarda tres días en levantar una barda.

- Si tres albañiles trabajan al mismo ritmo, ¿qué tiempo tardarán en levantar la misma barda? ______
- Si 10 albañiles trabajan al mismo ritmo, ¿qué tiempo tardarán en levantar la misma barda? ______
- ¿Cuál es el valor constante en esta situación? ______
- ¿Cuáles son los valores que varían y cuál es la dependencia entre ellos?
- Escriban en expresión algebraica la relación anterior.

b) Tres perros consumen un bulto de comida en 30 días.

- Si cuatro perros comen la misma cantidad de alimento diario, ¿en qué tiempo consumirán un bulto similar de alimento? ______
- Si siete perros comen la misma cantidad de alimento diario, ¿en qué tiempo consumirán un bulto similar de alimento? ______
- ¿Cuál es el valor constante en esta situación? ______
- ¿Cuáles son los valores que varían y cuál es la dependencia entre ellos? ______
- Escriban en expresión algebraica la relación anterior.

2. **Compartan sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.**

a) ¿Qué ocurre con el tiempo que tardan los albañiles en levantar una barda mientras más personas trabajen? ¿Qué ocurre con la cantidad de días que tardan en consumir un bulto de alimento conforme la cantidad de perros aumenta? ¿Encuentran una similitud en las situaciones?

InfórMate

La función de proporcionalidad inversa está dada por la relación:

$$y = \frac{k}{x} \text{ o } xy = k$$

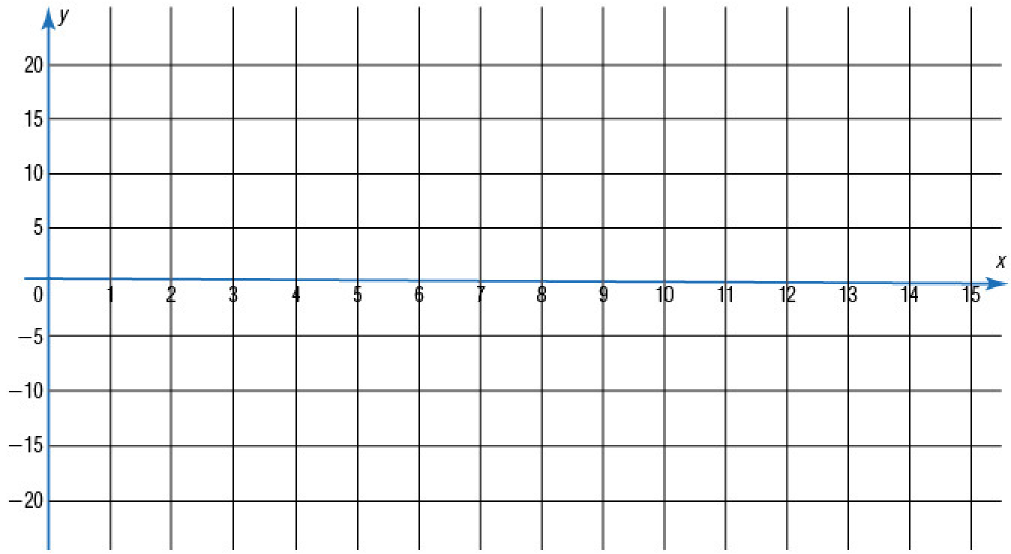
Al valor k se le denomina la constante de proporcionalidad. En esta relación y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

Actividad 7

1. Representen las gráficas de las siguientes funciones de acuerdo con los valores presentados en las tablas. Para diferenciarlas, al graficar utilicen el color rojo para el inciso a) y el azul para el inciso b).

a) $y = \frac{10}{x}$	
x	y
0.5	
1	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

b) $y = \frac{-10}{x}$	
x	y
0.5	
1	
2	
4	
6	
8	
10	
12	



2. Contesten las interrogantes de los siguientes incisos, considerando las tablas y gráficas anteriores.

a) ¿En qué cuadrante o cuadrantes hay gráfica cuando el valor de la constante es positivo? ______

b) ¿En qué cuadrante o cuadrantes hay gráfica cuando el valor de la constante es negativo? ______

c) En la gráfica de la función $y = \frac{10}{x}$, ¿qué ocurre con los valores de y si tomamos valores de x cada vez más cercanos a cero? ______

______

d) En la gráfica de la función $y = \frac{10}{x}$, ¿qué sucede con los valores de y si tomamos valores positivos de x cada vez más grandes? ______

______

e) En la gráfica de la función $y = \frac{-10}{x}$, ¿qué ocurre con los valores de y si tomamos valores de x cada vez más cercanos a cero por la derecha? ______

f) En la gráfica de la función $y = \frac{-10}{x}$, ¿qué sucede con los valores de y si tomamos valores positivos de x cada vez más grandes? ______

3. Comparen sus gráficas y respuestas anteriores para corregir las que tengan fallos y respondan las preguntas.

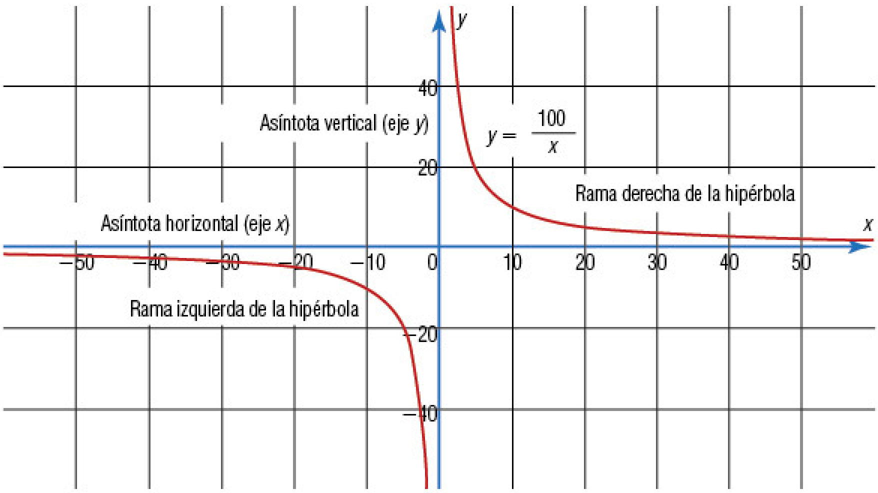
a) ¿Qué similitudes encuentran en las dos gráficas anteriores? ______

b) ¿Habrá algún valor de x que haga que la primera y segunda gráficas toquen al eje y? ¿Por qué? ______

c) ¿Habrá algún valor de x que haga que la primera y segunda gráficas toquen al eje x? ¿Por qué? ______

InfórMate

La gráfica de la función de proporcionalidad inversa se denomina hipérbola. Si graficamos la función $y = \frac{100}{x}$ considerando valores de x positivos y negativos, tendríamos una gráfica similar a la siguiente.



En la gráfica se observa que se han tomado tanto valores positivos como negativos para la variable x, lo que da origen a las dos partes o ramas de las que se compone la hipérbola. Estas ramas no se unen, pues las separan las asíntotas. Una asíntota es una recta a la cual la gráfica de una función se aproxima sin que la toquen o crucen. Pueden ser horizontales, verticales u oblicuas. En una función de proporcionalidad inversa, las asíntotas son los ejes x y y.

Una asíntota es horizontal cuando al tomar valores muy grandes o muy pequeños de x, los valores de y correspondientes en la función se acercan a dicha asíntota. En el ejemplo, el eje x (recta $y = 0$) es una asíntota horizontal.

Una asíntota es vertical cuando al tomar valores de x muy cercanos a ella, los valores correspondientes de y crecen muy rápido en valor absoluto. En el ejemplo el eje y (recta $x = 0$) es una asíntota vertical.

Si el valor de la constante de proporcionalidad es positiva ($k > 0$), como en la gráfica anterior, las ramas de la gráfica de la función de proporcionalidad inversa aparecen en el primero y en el tercer cuadrantes. Pero si el valor de la constante de proporcionalidad es negativa ($k < 0$), las ramas de la gráfica de la función de proporcionalidad inversa aparecen en el segundo y en el cuarto cuadrantes.

Actividad 8

1. Identifiquen cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función lineal y cuáles a una función de proporcionalidad inversa.

a) Escriban junto a cada una de las gráficas lineales lo siguiente:

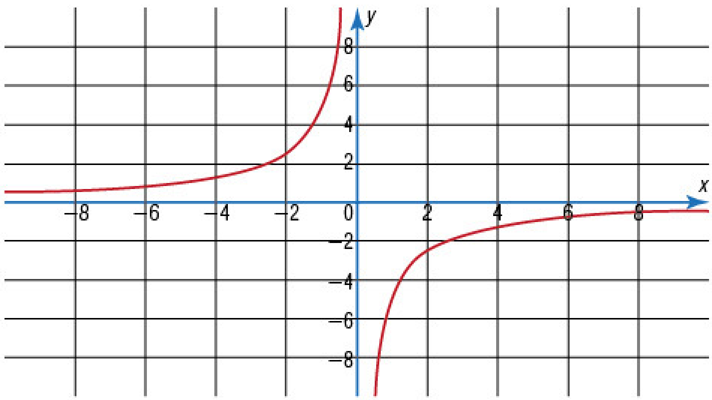
- El signo de su pendiente.
- El valor de la ordenada al origen.
- Si se trata de una función de proporcionalidad o no.

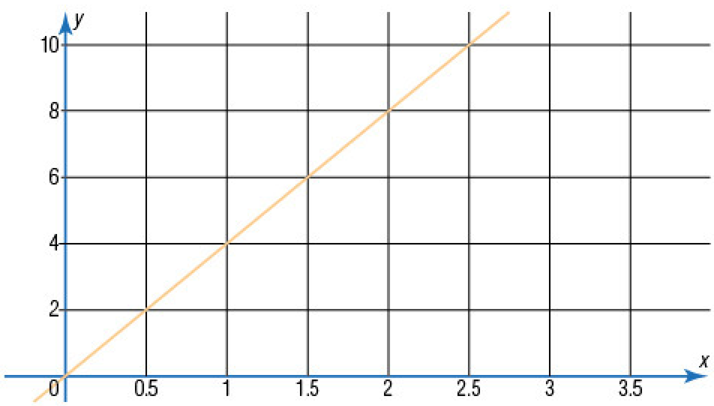
b) Marquen con color las asíntotas verticales y las horizontales en las gráficas de proporcionalidad inversa.

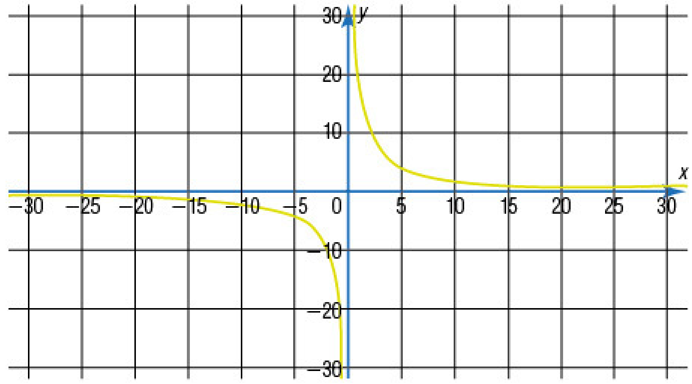
c) En todos los casos señalen si la constante k es positiva o negativa.

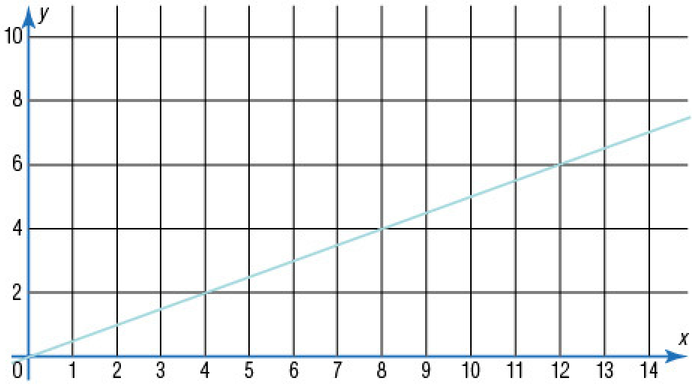
De interés

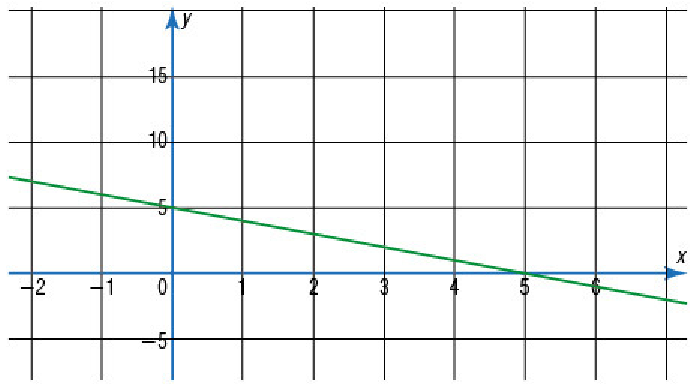
El concepto de densidad es relativo a la física; incluso, es probable que hayas experimentado un fenómeno de esta naturaleza. Por ejemplo, en una piscina es más complicado flotar que en el mar, porque la sal del mar hace que el agua sea más densa; de tal modo que ahí los cuerpos flotan con mayor facilidad.

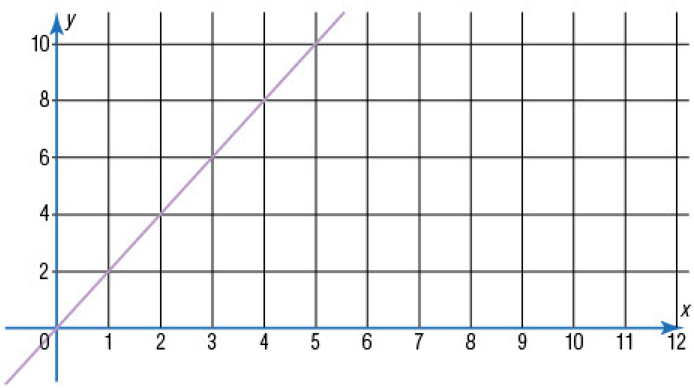












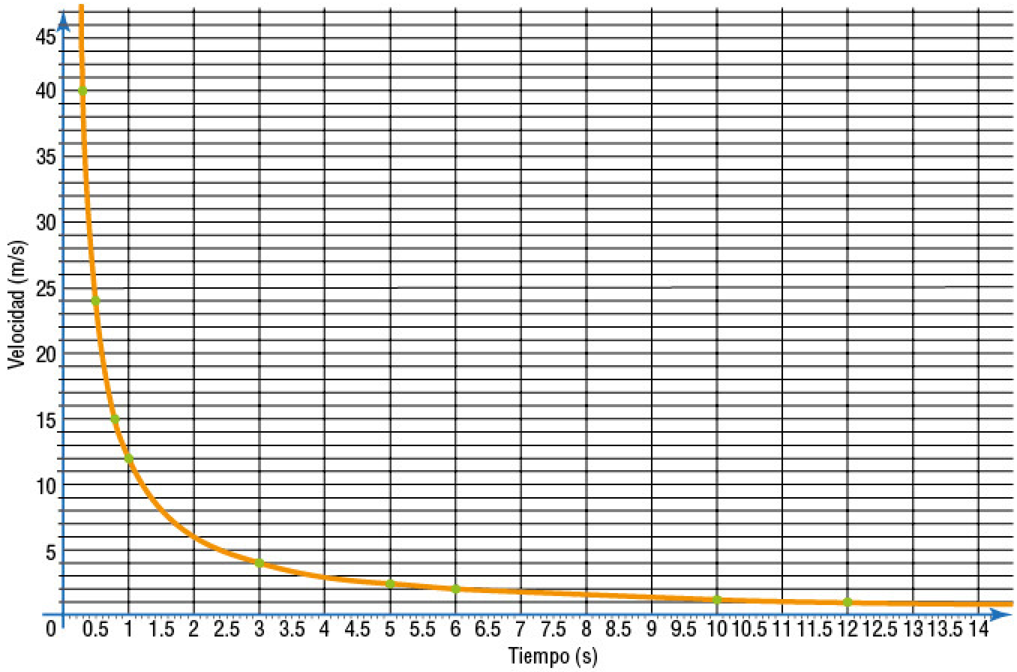
2. **Muestren sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.**

a) ¿Todos coincidieron en la misma cantidad de gráficas de proporción inversa?
b) Pidan asesoría a su docente para corroborar sus respuestas.

Aplicaciones

Actividad 9

1. Analicen la gráfica siguiente, la cual muestra la variación de la velocidad (en metro por segundo) de un objeto, si este tuviera que recorrer la misma distancia en diferentes tiempos.



2. Completen la siguiente tabla de acuerdo con la información de la gráfica.

Tiempo (s)	0.3	0.5	0.8	1	3	5	6	10	12
Velocidad (m/s)									

3. Respondan las preguntas con base en la tabla y gráfica anterior.

a) ¿Cuál es la masa de la sustancia? ______

b) ¿Cuál es su densidad si su volumen es 10? ______

c) ¿Cuál es la densidad cuando el volumen es 2? ______

d) ¿Cuál es el volumen cuando la densidad es 12 g/cm^3? ______

e) ¿Cuál es la función matemática cuya gráfica es la anterior? ______

f) ¿Con base en la expresión anterior, ¿cuál es su densidad cuando su volumen es 15? ______

4. **Compartan sus respuestas con los demás compañeros y verifiquen que tipo de variación se aplicó.**

a) ¿Qué tipo de variación se presenta en el problema presenta: proporcionalidad directa o proporcionalidad inversa?
b) Discutan con sus compañeros cómo sería la gráfica si el problema fuera de proporcionalidad directa.
c) Señalen las diferencias entre las gráficas de ambos aspectos.

Actividad 10

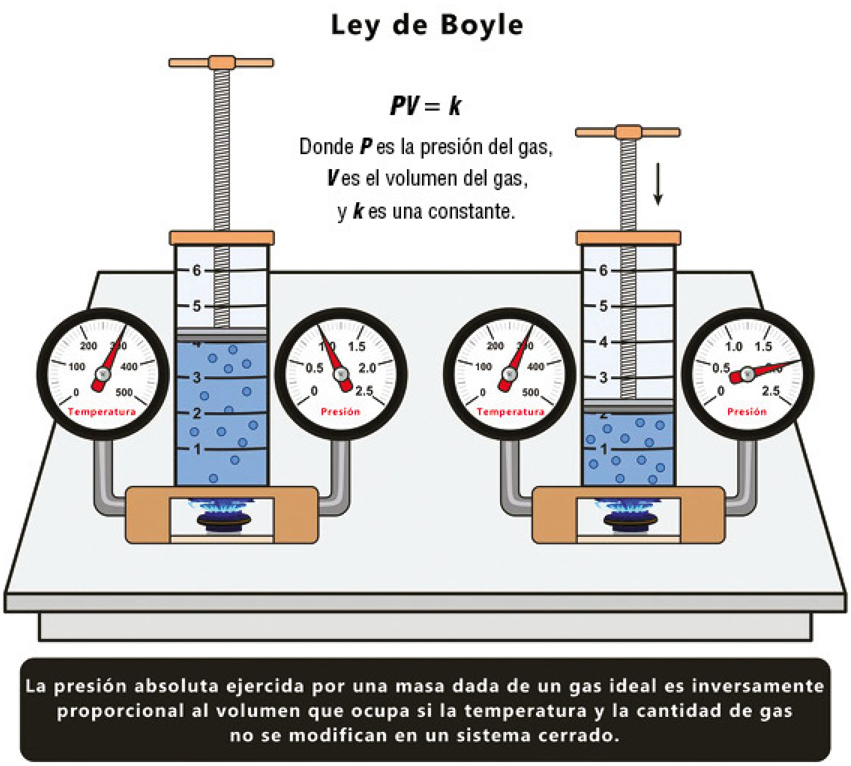
1. **Analicen la siguiente información.**

La ley de Boyle establece que la presión P del gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen V del recipiente siempre y cuando se mantenga la temperatura constante.

Esto es:

$$P \times V = k$$

donde k es un valor constante. La presión se da en atmósferas (atm).



A partir de estos estudios se obtuvo la tabla de valores para el gas A y la gráfica del gas B (en ambos se da la presión en atm y el volumen en cm^3).

Tabla para el gas A

Volumen V	10	11.11	12.5	14.28	16.66	20	22.22	25	33.33
Presión $P = \frac{k}{V}$	20	18	16	14	12	10	9	8	6

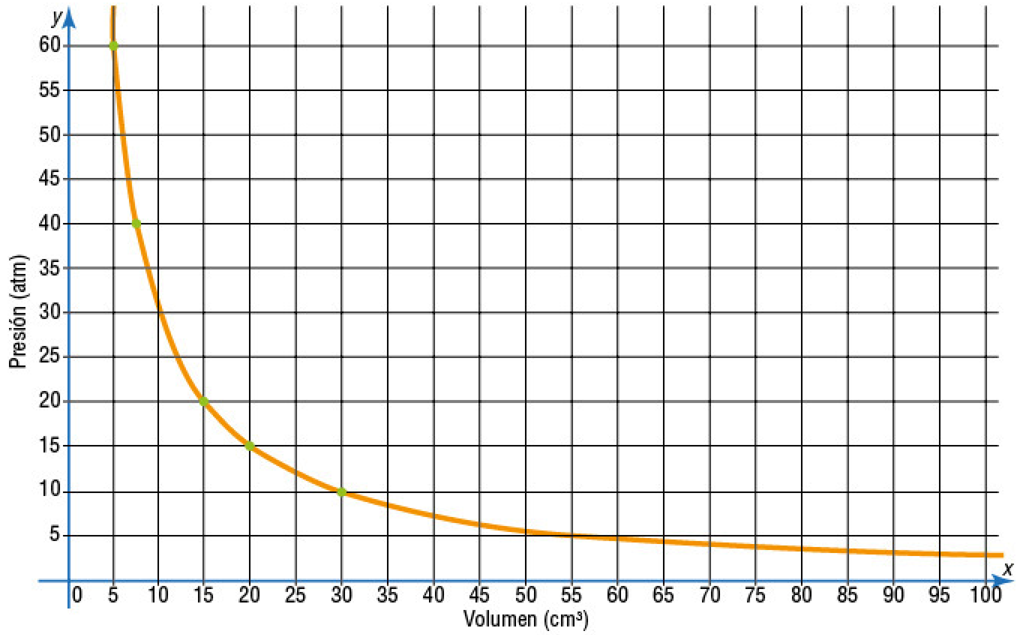
De interés

La ley de Boyle es aplicable en la vida cotidiana. Cuando compras un frasco de mayonesa, ¿cómo saber si antes no ha sido abierto?; pues al observar que la tapa está invertida, ya que la presión del aire dentro del recipiente es menor y se presuriza al destaparlo; por eso escuchas el sonido característico al abrirlo cuando se invierte la tapa.

Relaciona

En *Ciencias y Tecnología. Física* aprendiste sobre la ley de Boyle, por lo que tal vez ya la hayas visualizado mediante diversos ejemplos.

Gráfica para el gas B



2. **Respondan lo que se pide.**

a) Determinen las constantes de proporcionalidad para cada uno de los gases.

Gas A:

Gas B:

b) ¿En cuál de los gases se tiene una mayor presión cuando el volumen es de 20 cm^3? ______

c) ¿En cuál de los gases la presión es menor cuando el volumen es de 7 cm^3? ______

3. **Representen las expresiones algebraicas para cada uno de los dos gases.**

Gas A:

Gas B:

4. **Intercambien respuestas y verifiquen si son correctas.**

Pausa en el camino

Actividad 11

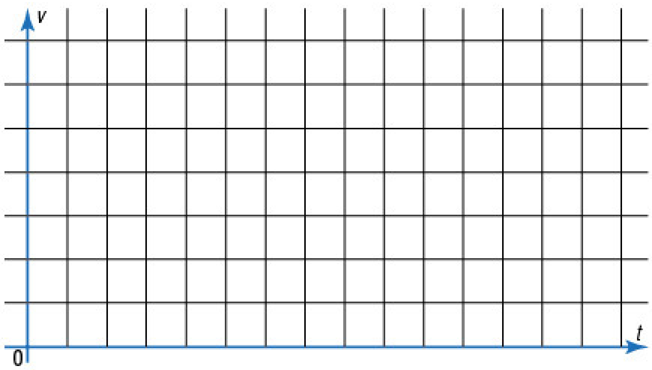
1. **Generen una función de proporcionalidad inversa y su gráfica de acuerdo con el problema dado y con las pautas sugeridas.**

Un ciclista debe recorrer una determinada distancia fija (*d*) durante su entrenamiento. De acuerdo con su récord de mediciones, sabe que si mantiene una velocidad de 65 km/h, el tiempo que le toma recorrer dicha distancia es de 1.5 horas.

a) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad inversa? ______

b) Si se toma como *t* la cantidad de horas que le lleva recorrer la distancia y como *v* la velocidad que mantiene en su recorrido, ¿cuál es la expresión matemática que relaciona la cantidad de horas que tarda en recorrer la distancia *d* cuando varía su velocidad?

c) Dibujen la gráfica que representa cómo cambia el tiempo que tarda en recorrer la distancia en función de la velocidad a la que realiza el recorrido. Según sus datos, coloquen los valores en los ejes *x* y *y*.



d) La representación gráfica de esta función, ¿tiene asíntota horizontal?, ¿a qué valor se acerca el tiempo cuando se tienen valores de *v* más grandes? ______

e) ¿Es físicamente posible hacer que el tiempo sea cero?, ¿qué implicaría? ______

2. **Compartan sus respuestas y revisen sus procedimientos.**

a) Vuelvan a realizar sus operaciones y corrijan donde sea necesario.

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Visto desde otra óptica

Aprendizaje esperado: Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lee la siguiente información. Posteriormente realiza lo que se te pide empleando tu conocimiento sobre las sucesiones.

Glosario

Sucesión numérica. Es una lista de números que guardan una relación entre sí.

A Rubén y a Rolando se les presenta la siguiente sucesión numérica y se les pide que cada uno de ellos genere una fórmula que la describa.

6, 9, 12, 15, 18, 21, …

- Rubén señala que la fórmula es:

$$3(n - 2) + 9$$

- Rolando afirma que la fórmula es:

$$3n + 3$$

a) Completa la siguiente tabla para determinar si las fórmulas propuestas por Rubén y Rolando generan la sucesión.

	n	1	2	3	4	5	6
Rubén	$3(n - 2) + 9$						
Rolando	$3n + 3$				15		

b) ¿Se obtuvieron los mismos valores para cada columna de la tabla? ¿A qué se debe si las fórmulas son diferentes? ______________________________

____

____

____

c) ¿Son correctas las respuestas de Rubén y Rolando?, ¿por qué? ______________________________

____

____

____

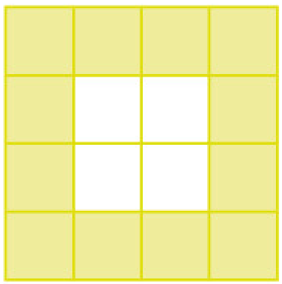
2. Analicen sus respuestas y determinen si éstas son correctas. En caso necesario, hagan los ajustes pertinentes.

Ruta del saber

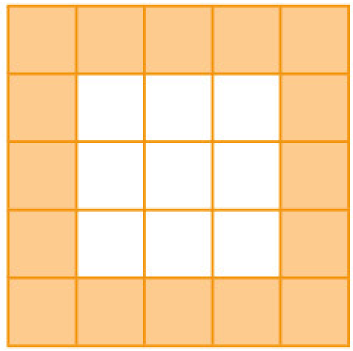
Equivalencia de expresiones de primer grado

Actividad 2

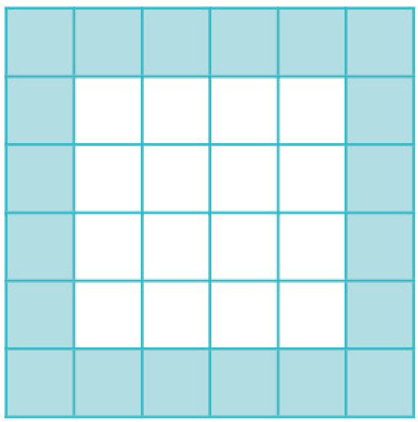
1. Observen los siguientes arreglos de cuadros. Posteriormente completa la tabla.



Arreglo 4 × 4. Borde de 12 cuadros.



Arreglo 5 × 5.



Arreglo 6 × 6.

Valor de n	1	2	3	4	5	6	7	8
Arreglo	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	11×11
Núm. de cuadros en el borde	12	16	20					
Diferencia del número de cuadros entre arreglos	$16 - 12 = 4$	$20 - 16 = 4$						

2. Respondan las preguntas.

a) En un arreglo 9×9, ¿cuántos cuadros conformarán el borde de la figura? ______

______

b) En un arreglo 20×20, ¿cuántos cuadros conformarán el borde de la figura?

______

c) Describan el procedimiento que utilizaron para determinar la cantidad de cuadros en los arreglos 6×6 y 20×20. ______

______

______

Relaciona

En tu curso de *Matemáticas* de primer grado analizaste y obtuviste la fórmula de una sucesión aritmética de acuerdo a la relación entre los elementos de la misma. Esta fórmula viene dada por la relación $an+b$, en donde n es el número del término deseado, a es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión y b se determina a partir del primer término de la sucesión.

d) Obtengan la fórmula general que representa el número de cuadrados en el borde de cada uno de los arreglos, si el primer arreglo es el de 4×4.

e) Empleen la fórmula anterior para determinar qué arreglo tiene 52 cuadros en su borde.

3. Expliquen a sus compañeros los procedimientos que emplearon para responder las preguntas y determinen si la fórmula que propusieron es correcta.

a) Expliquen cómo podrían determinar cuáles fórmulas son correctas.

b) Escriban las fórmulas propuestas por las parejas que sean correctas y que sean distintas.

Actividad 3

1. Analicen las siguientes fórmulas que proporcionaron algunos equipos de una secundaria al presentarles el mismo problema del arreglo $n \times n$.

Fórmula del equipo de Juan	Fórmula del equipo de Raúl	Fórmula del equipo de Johana	Fórmula del equipo de Daniela
$4(n-2)$	$4(n+2)$	$4n+2$	$2(n+4)+2n$

a) Determinen cuáles de las fórmulas son correctas. Empleen los procedimientos que establecieron en la actividad anterior.

b) Si las fórmulas correctas tienen expresiones diferentes, ¿por qué dan los mismos valores al sustituir en ellas el mismo valor de n? Argumenten sus respuestas.

2. Dialoguen para que puedan llegar a una conclusión acerca del por qué de las diferencias entre las fórmulas correctas anteriores.

a) En caso de que no lleguen a un común acuerdo consulten a su docente y entre todos obtengan una conclusión.

Actividad 4

1. **Escriban los primeros 10 términos de las sucesiones determinadas por las fórmulas que se muestran.**
   a) $5 + 3n$
   b) $5 + 3(n - 1)$
   c) $5 + 3(n - 2)$
   d) $5 + 3(n - 3)$
   e) $5 + 3(n + 1)$
   f) $5 + 3(n + 2)$

2. **Respondan lo siguiente.**
   a) ¿Qué similitudes encuentran entre los términos de las sucesiones?
   b) Escriban la fórmula de la sucesión que tiene por primer término -1 y la distancia entre cualesquiera dos términos consecutivos es 3.
   c) Escriban la fórmula de la sucesión que tiene por primer término 17 y la distancia entre cualesquiera dos términos consecutivos es 3.
   d) ¿Cuál es la fórmula que determina la sucesión cuyos 10 primeros términos son

   $$-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots?$$

3. **Expliquen cómo obtuvieron sus respuestas y verifíquenlas. Tomen en cuenta lo siguiente.**
   a) ¿Cuál es la relación que tiene el 5 en las sucesiones anteriores?
   b) ¿Cuál es la relación que tienen los números dentro de los paréntesis? ¿Encontraron un patrón?
   c) ¿Todas las sucesiones son las mismas?

4. **Escriban la fórmula, con asesoría de su docente, de las sucesiones con las siguientes características.**
   a) Inicia en 9 y la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos es 5.
   b) Inicia en 4 y la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos es 5.
   c) Inicia en -1 y la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos es 5.

Actividad 5

1. Relacionen cada sucesión de la columna izquierda con la expresión o expresiones que la generan de la columna derecha.

Relaciona

En el curso de *Matemáticas 1* aprendiste cómo obtener las fórmulas de una sucesión; ahora trabajarás con esas fórmulas bajo ciertos ajustes. El objetivo será determinar si generan las mismas sucesiones o no.

Sucesión	Fórmula o expresión
a) $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$	________ $2n - 1$
	________ $2(n - 7) - n - 1$
b) $2, 4, 6, 8, \dots$	________ $5(n - 2) + 1$
	________ $2n - 6$
c) $-4, 1, 6, 11, \dots$	________ $-(15 - n)$
	________ $2(n + 1) - 3$
d) $-14, -13, -12, \dots$	________ $5n - 9$
	________ $2(n + 1) - 8$
e) $1, 3, 5, 7, \dots$	________ $n - 15$
	________ $2n$

2. Escriban en la tabla las sucesiones a las que les correspondió más de una fórmula o expresión.

Sucesión	Expresión 1	Expresión 2

3. Muestren sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron. Para verificar sus respuestas tomen en cuenta lo siguiente.

a) ¿Cómo hallan el primer término de una sucesión si conocen su fórmula?
b) ¿La misma fórmula puede representar dos sucesiones diferentes?
c) ¿La misma sucesión puede tener distintas representaciones?

InfórMate

Dos expresiones algebraicas se dice que son equivalentes si tienen el mismo valor numérico, independientemente del valor de las literales que contengan.

Por ejemplo. ¿Son equivalentes las expresiones $4x + 3 - 2x$ y $5 + 2(x - 1)$?

Para determinar si las expresiones son equivalentes, sustituiremos los mismos dos valores de la variable x en ambas expresiones y observaremos si se obtienen los mismos resultados en cada caso.

Sustituiremos $x = 1$, $x = -2$ en cada expresión:

	$4x + 3 - 2x$	$5 + 2(x - 1)$
Si $x = 1$	$= 4(1) + 3 - 2(1)$ $= 4 + 3 - 2$ $= 5$	$= 5 + 2(1 - 1)$ $= 5 + 2(0)$ $= 5$
Si $x = -2$	$= 4(-2) + 3 - 2(-2)$ $= -8 + 3 + 4$ $= -1$	$= 5 + 2(-2 - 1)$ $= 5 + 2(-3)$ $= 5 - 6$ $= -1$

Como se han obtenido los mismos valores en cada caso, afirmamos que estas expresiones son equivalentes. Se representa la equivalencia de la siguiente manera:

$$4x + 3 - 2x = 5 + 2(x - 1)$$

Actividad 6

1. **Determinen si las expresiones $-3(n - 2) + 4$ y $2(1 - n) + 8 - 2n$ son equivalentes. Para hacer esto, sustituyan los valores $x = 2$ y $x = -3$ en ambas expresiones y respondan las preguntas.**

Expresión 1: $-3(n - 2) + 4$		Expresión 2: $2(1 - n) + 8 - 2n$	
Valor a sustituir	Operaciones y resultado	Valor a sustituir	Operaciones y resultado
$x = 2$		$x = 2$	
$x = -3$		$x = -3$	

a) ¿Obtuvieron los mismos resultados en cada expresión? ______

b) ¿Son equivalentes las expresiones $-3(n - 2) + 4$ y $2(1 - n) + 8 - 2n$? Expliquen. ______

2. Intercambien sus respuestas con otros compañeros y revísenlas.

a) Pregunten para saber por qué respondieron de tal forma.
b) Verifiquen que sus respuestas sean las correctas y corrijan donde sea necesario bajo común acuerdo.

Actividad 7

1. Observen las siguientes dos expresiones algebraicas que se generaron al trabajar con sucesiones:

$$6(n + 1) - 1 \text{ y } 3(4 + 2n) - 7$$

a) Completen la siguiente tabla.

Expresión 1: $6(n + 1) - 1$		Expresión 2: $3(4 + 2n) - 7$	
Indicación	**Operaciones y resultado**	**Indicación**	**Operaciones y resultado**
Multiplica por 6 la expresión dentro del paréntesis.	$6(n + 1) - 1 =$ $6n + 6 - 1 =$	Multiplica por 3 la expresión dentro del paréntesis.	
Sumen los valores que no tengan literal siguiendo la regla de los signos para la suma y la resta.		Sumen los valores que no tengan literal siguiendo la regla de los signos para la suma y la resta.	
Ordenen la expresión, escribiendo primero la parte literal y después la numérica.		Ordenen la expresión, escribiendo primero la parte literal y después la numérica.	

De interés

Las equivalencias se pueden ver cuando se hace un cambio de moneda. Por ejemplo, al cambiar un dólar a pesos, será necesario utilizar una regla de equivalencia que permita hacer dicho cambio. Actualmente, ¿cuántos pesos equivalen a un dólar?

b) ¿Llegaron al mismo resultado en ambas columnas? ______

c) De acuerdo con lo anterior, se puede decir que la siguiente igualdad es cierta. Argumenten sus respuestas.

$$6(n + 1) - 1 = 3(4 + 2n) - 7$$

____

____

d) Determinen otra fórmula o expresión diferente a las dos anteriores y que al simplificarla se obtenga $6n + 5$. ______________________

2. Comparen sus expresiones y operaciones.

a) Comenten en qué caso obtuvieron dificultades.
b) En caso de que no se haya llegado al mismo resultado revisen sus operaciones y corrijan donde sea necesario.
c) Si algún compañero no comprendió una parte ayúdenlo y explíquenle cómo resolverla.

InfórMate

Otra forma de verificar si dos expresiones son equivalentes, es a partir de simplificar ambas expresiones. Si las expresiones simplificadas son iguales, entonces las expresiones originales son equivalentes.

Por ejemplo. ¿Son equivalentes las expresiones $4x + 3 - 2x$ y $5 + 2(x - 1)$?

Para saber si son equivalentes, se simplifican ambas expresiones:

$4x + 3 - 2x$	Expresión 1
$4x - 2x + 3$	Ordenando las variables
$2x + 3$	Restando los coeficientes de las variables
$5 + 2(x - 1)$	Expresión 2
$5 + 2x - 2$	Realizando la multiplicación del factor 2 a los elementos dentro del paréntesis
$2x + 5 - 2$	Ordenando la variable y los números
$2x + 3$	Restando los valores

Como se ha llegado a la misma expresión en cada caso, se puede afirmar que las expresiones $4x + 3 - 2x$ y $5 + 2(x - 1)$ son equivalentes.

PARA TIC

Puedes pensar en los conceptos de equivalencia y resolución de ecuaciones a partir de la idea de una balanza. Visita el siguiente enlace para explorar esta idea:

http://bit.ly/2Qrp9TC

(Consulta: 22 de marzo de 2018).

Actividad 8

1. Seleccionen la opción que represente la expresión equivalente en cada inciso. Subrayen la respuesta correcta.

a) $3x + 4$
- $3(x - 1)$
- $2x + x + 3$
- $x(3 + 4)$
- $3(x + 1) + 1$

b) $2y + 10$
- $y(1 + 10)$
- $2(y + 2)$
- $2(y) + 10$
- $2(y + 2) - 10$

c) $4(z + 3) - 12$
- $4z$
- $3z - 9$
- $4z - 12$
- $4z + 12$

2. Revisen sus respuestas y determinen cuáles son las correctas. Corrijan en caso de que sea necesario.

Actividad 9

1. Determinen una expresión equivalente a la que se da en cada fila de la tabla. Anoten en la columna de la derecha la expresión equivalente que encontraron.

Expresión original	Expresión equivalente
a) $7(x - 2)$	
b) $4(y + 2) - 5$	
c) $-2(x - 2) - 2$	
d) $3(x - 1) + 2(-3)$	
e) $10 - 2(x - y)$	

2. Simplifica en el espacio cada una de las siguientes expresiones y relaciona las del lado derecho con su equivalente del lado izquierdo.

$-2(1 - m) + 2n$	$3(m + n - 2) + 3$
$9(1 - n) - 18$	$1 - 3(n - 3)$
$2(m + n + 1) - 4$	$3(2 - n) + 4$
$9(n - 1)$	$3(m + n + 3) - 12$

a) Anoten las expresiones equivalentes en los espacios siguientes.

______________________ es equivalente a ______________________

______________________ es equivalente a ______________________

______________________ es equivalente a ______________________

______________________ es equivalente a ______________________

3. Propongan del lado derecho algunas operaciones adicionales para cada expresión de la izquierda, de tal modo que sigan siendo equivalentes.

Expresión original	Expresión equivalente
a) $3n + 3$	
b) $x - 5$	
c) $y - 2\,000$	
d) $5 - 8n$	
e) $2 + 7x$	

4. Expongan a sus demás compañeros los resultados de sus equivalencias de los tres numerales anteriores.

a) Comprueben que sean en realidad expresiones equivalentes.
b) Expresen qué operaciones realizaron para llegar sus resultados.
c) Si se tienen errores realicen las correcciones.

5. Usen una lluvia de ideas para explicar qué proceso general se debe realizar para obtener una expresión equivalente a otra.

Y tú, ¿qué harías?

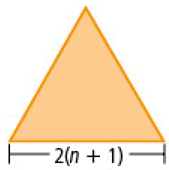
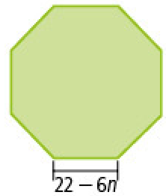
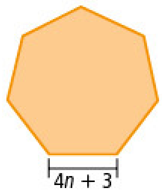
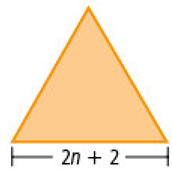
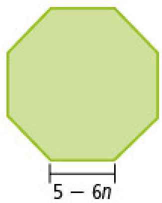
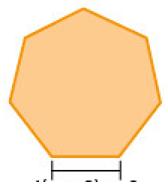
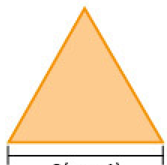
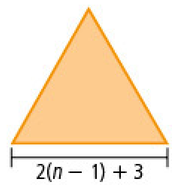
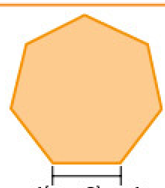
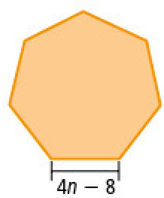
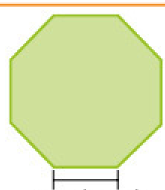
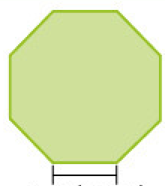
La vida es como una balanza donde se tiene que aprender a tener equilibrio. Por ejemplo, hay quienes dedican más tiempo al trabajo que a su familia, de tal modo que su "balanza" está desequilibrada y a la larga esto le traerá consecuencias.

En tu caso, ¿cuáles serían tus prioridades para que tu "balanza" esté equilibrada?

Actividad 10

1. Observa los polígonos regulares y relaciona las columnas que vinculen las figuras cuyos lados tienen la misma medida.

a) Considera que las expresiones que representan las medidas de sus lados deben ser equivalentes.

a)  $2(n + 1)$	( )  $22 - 6n$
b)  $4n + 3$	( )  $2n + 2$
c)  $5 - 6n$	( )  $4(n + 3) - 9$
d)  $2(n + 1)$	( )  $2(n - 1) + 3$
e)  $4(n - 3) + 4$	( )  $4n - 8$
f)  $4 - 6(n - 3)$	( )  $8 - 3(1 + 2n)$

2. Intercambia tus respuestas con un compañero.

a) Justifiquen sus respuestas y comenten los incisos en donde tengan dudas.
b) Lleguen a un común acuerdo acerca de las respuestas correctas.

Pausa en el camino

Actividad 11

1. Obtengan en cada caso la fórmula de la sucesión presentada y después citen dos expresiones equivalentes a cada una.

Sucesión	Fórmula	Expresiones equivalentes
3, 5, 7, 9, 11, …		
1, 4, 7, 10, 13, …		
3, 8, 13, 18, 23, ….		
3, 7, 13, 15, 19, …		
−1, −4, −7, −10, −13, …		
7, 6, 5, 4, 3, 2, …		
3, 11, 19, 27, 35, …		

2. Compartan y discutan sobre cómo obtener las fórmulas así como sus expresiones equivalentes a cada una. Tomen en cuenta las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo obtuvieron las fórmulas de las sucesiones?
b) ¿Cuántas expresiones equivalentes a otra pueden encontrar?

Lección 8

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Operaciones con letras

Aprendizaje esperado: Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Inicio del camino

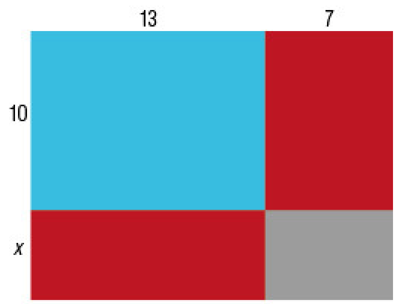
Actividad 1

1. Lean la siguiente situación.

El docente le propuso a Ana expresar el perímetro y el área del rectángulo de la imagen, compuesto por cuatro rectángulos: uno azul, dos rojos y uno gris. Ana dudó al ver una *x* en lugar de un número, sin embargo decidió continuar porque confía en sus conocimientos y sabe que el perímetro y el área de un rectángulo son temas que vio desde primaria.

Relaciona

Recuerda que desde primaria aprendiste a calcular el perímetro de figuras geométricas y en *Matemáticas* de primer grado de secundaria, calculaste el perímetro de polígonos, círculos, triángulos y cuadriláteros.



2. Respondan las preguntas que Ana se hizo para poder resolver el ejercicio.

a) ¿Qué es el perímetro de un rectángulo y cómo lo calculo? ______

b) ¿Qué es el área de un rectángulo y cómo la calculo? ______

c) ¿Cuál es la expresión que representa el ancho del rectángulo grande? ______

d) ¿Cuál es la expresión que determina el largo del rectángulo grande? ______

3. Escriban las expresiones que representan el perímetro y el área del rectángulo, utilizando las expresiones del largo y el ancho.

Perímetro = ______

Área = ______

4. Compartan sus respuestas con sus compañeros.

a) Verifiquen que las expresiones para el área y el perímetro sean equivalentes, en caso de que haya diferencias en sus respuestas.
b) En caso de duda, pregunten a su docente.

Ruta del saber

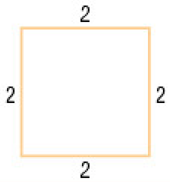
Suma y resta de expresiones algebraicas

Actividad 2

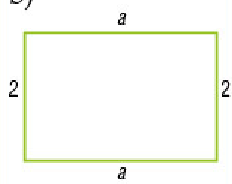
1. Relacionen las figuras con su perímetro.

a) Escriban, dentro de cada paréntesis, la letra de la figura que tiene el perímetro que se indica.

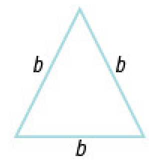
a)



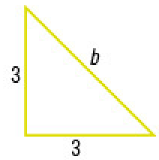
b)



c)



d)

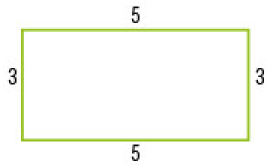


( ) $P_1 = b + 6$ ( ) $P_2 = 2 + 2 + 2 + 2$

( ) $P_3 = b + b + b$ ( ) $P_4 = 2a + 4$

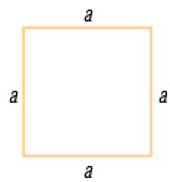
b) Anoten en la línea la expresión que representa el perímetro de cada figura.

a)



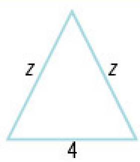
$P =$ __________

b)



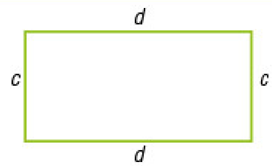
$P =$ __________

c)



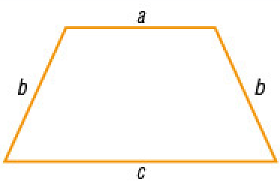
$P =$ __________

d)



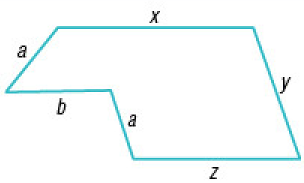
$P =$ __________

e)



$P =$ __________

f)



$P =$ __________

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

a) Expliquen el razonamiento que los llevó a conseguir sus resultados.

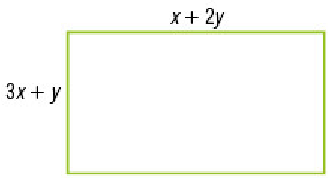
b) ¿Todos obtuvieron las mismas respuestas? Por ejemplo, alguien obtuvo $4a$ y otro, $a + a + a + a$? ¿Son equivalentes ambas expresiones?

c) Expliquen la diferencia entre calcular y representar el perímetro de una figura.

Actividad 3

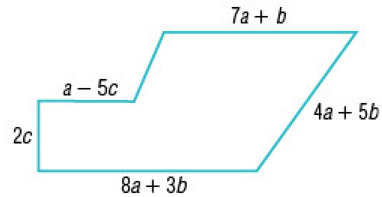
1. Escriban la expresión algebraica mínima que representa el perímetro de cada figura geométrica, según corresponda.

a)



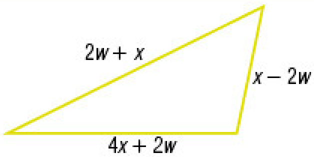
$P =$ ______________

b)



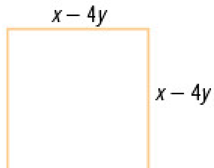
$P =$ ______________

c)



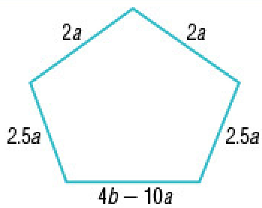
$P =$ ______________

d)



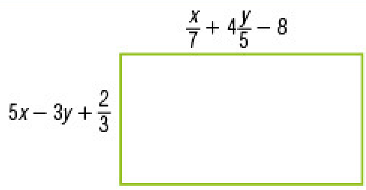
$P =$ ______________

e)



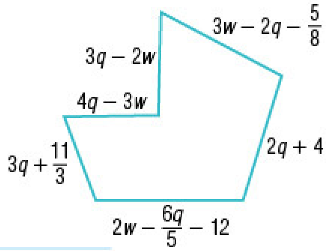
$P =$ ______________

f)



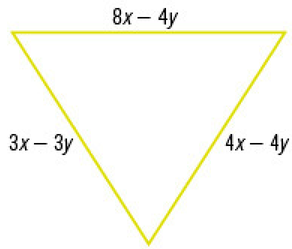
$P =$ ______________

g)



$P =$ ______________

h)



$P =$ ______________

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

a) Consideren, ¿cómo se suman expresiones algebraicas?; por ejemplo, ¿la expresión $2y + y$ es igual a $3y$ o a $2y^2$?
b) ¿Todos lograron las mismas respuestas?
c) ¿Qué características deben tener las partes literales de las expresiones algebraicas para poder sumarlas?
d) ¿Cómo redujeron las expresiones que tienen signos negativos?
e) Corrijan en caso de ser necesario.

3. Redacten un algoritmo para sumar expresiones algebraicas.

____

____

Actividad 4

1. **Reduzcan los términos semejantes en las siguientes expresiones.**
   a) $3a - 4b + 5a - 3b =$ ______
   b) $6x + 5x - 3y + 2y + 10 =$ ______
   c) $\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y - 4 + 3x - 2y =$ ______
   d) $5.6w + 5p - 3.5w + 5.5p + q =$ ______
   e) $2k - m + 3n - 5k + 7m =$ ______
   f) $9a + 4b - 6.5c + 3d - 1 - a - b - c - d =$ ______

2. **Comparen sus respuestas.**
   a) Expliquen cómo obtuvieron sus resultados. ¿Todos aplicaron correctamente la regla de los signos para la suma y la resta?
   b) En caso de que consiguieran diversos resultados consulten a su docente para pedir orientación.

3. **Corrijan en caso necesario y con base en lo anterior para que así todos logren las respuestas correctas.**

InfórMate

Un monomio es una expresión algebraica compuesta de un término, es decir, que tiene sólo un coeficiente y que puede tener una o más literales con sus respectivos exponentes naturales. El coeficiente y las literales están unidos por una multiplicación. Ejemplos de monomios son:

$-4a$ Su coeficiente es -4 y su parte literal, a.

$\frac{5}{7}z^2$ Su coeficiente es $\frac{5}{7}$ y su parte literal es z^2.

w Su coeficiente es 1 y su parte literal, w.

-5 Su coeficiente es -5 y su parte literal tiene exponente 0, que es igual a 1 por lo que no se escribe.

Ejemplos de expresiones que no son monomios:

$$5x^{-3},\ 4\sqrt{x}\ \text{ o }\ m^{\frac{2}{3}}$$

pues sus exponentes no son números naturales.

Cuando una expresión se forma con la suma o la resta de monomios, es decir, se tienen dos o más términos, dichas expresiones se conocen como polinomios. Por ejemplo, en la expresión:

$$x + 2.5y - \frac{5}{6}z$$

se contemplan tres términos o monomios; éstos son: x, $2.5y$, y $-\frac{5}{6}z$. Por tanto, es un polinomio. Cuando dos o más monomios tienen la misma parte literal con sus exponentes correspondientes iguales, entonces éstos se conocen como términos semejantes.

De interés

Los monomios y los polinomios son las expresiones matemáticas más sencillas. Por tanto, constituyen la base para el lenguaje matemático y, por eso, se utilizan en diversas ciencias, tales como física, biología y química.

PARA TIC

Visita la siguiente página donde encontrarás una explicación para operar términos semejantes.

https://bit.ly/2Ogk4fq

(Consulta: 13 de septiembre de 2018).

Por ejemplo, los siguientes grupos de monomios son semejantes entre sí.

$4.7x$, $-\frac{6}{11}x$ y $-2x$, pues su parte literal es x.

$-w^2$, $3.4w^2$ y $\frac{9}{17}w^2$, pues su parte literal es w^2.

Reducir los términos que son semejantes significa sumar o restar los coeficientes de los mismos de acuerdo con las reglas de los signos, de modo que el resultado mantiene la misma parte literal junto con sus exponentes. Por ejemplo, si se quiere reducir los términos semejantes en la expresión:

$$3a - 7a + 3c + 6 =$$

observamos que sólo los dos primeros términos son semejantes; por tanto, se hace la operación con sus coeficientes de acuerdo con la regla de los signos, es decir:

$$\begin{aligned} 3a - 7a + 3c + 6 &= (3a - 7a) + 3c + 6 && \text{Agrupamos los términos semejantes.} \\ &= (-4a) + 3c + 6 && \text{Pues } 3 - 7 = -4 \\ &= -4a + 3c + 6 \end{aligned}$$

Observa que las partes literales se mantienen iguales.

Actividad 5

1. **Encuentra los términos que faltan en cada inciso para que la igualdad sea verdadera.**

a) $3a +$ ______ $+$ ______ $-5b + 1 = 5a + 2b + 1$

b) $4c - 3d -$ ______ $+$ ______ $= 4c + d - 1$

c) $w-$ ______ $+ 4 +$ ______ $+$ ______ $-p = -4w + 4p + 10$

d) $x + 5y - 3x +$ ______ $+$ ______ $= -7y + 5x$

e) $\frac{1}{2}k + \frac{3}{4}k +$ ______ $-$ ______ $+ 15 = j + k + 5$

2. **Comparen sus respuestas.**

a) Comenten cómo las obtuvieron. ¿Tienen las mismas respuestas? ¿Identificaron los términos semejantes? Por ejemplo, ¿qué se debe sumar a –3d para obtener d?

3. **Comenten en qué caso tuvieron dificultades y verifiquen si hay errores en el proceso o en el resultado.**

a) Corrijan, en caso de ser necesario.

Actividad 6

1. **Analicen las operaciones que se indican y describan en el recuadro la forma como consideran que deben resolverse.**

   a) Tengan en cuenta el signo antes de los paréntesis y determinen cómo afecta a los términos que están dentro de los mismos.

   $(2 + 3) + (5 - 4) =$

   $(6 - 2) - (1 - 3) =$

   $(3x - 5) + (4x + 2) =$

   $(5a - 3) - (3a - 5) =$

2. **Compartan sus respuestas y, junto con su docente, examinen los diferentes procedimientos que utilizaron para obtenerlas.**

3. **Redacten en el pizarrón un procedimiento para eliminar los paréntesis cuando hay un signo antes de ellos.**

   a) Cópienlo en su cuaderno, ya que lo consultarán en otras actividades.

Actividad 7

1. **Retoma el procedimiento de la actividad anterior y aprovéchalo para resolver las siguientes operaciones.**

   a) $(x + y + z) + (2z - 3y - 8z) =$

   b) $(5.7x + 3y - z) + (9x - 4.5y - 2.6z) =$

Y tú, ¿qué harías?

En ocasiones, trabajar en el aula con otros compañeros puede ser difícil, e incluso llevamos a tener relaciones y actitudes destructivas. ¿Qué harías para corregirlas? Sin duda, la autoestima y el respeto son dos factores indispensables, pero siempre es válido pedir ayuda, incluso a tu docente.

c) $\frac{2}{5}a+b-5c \;+\; 3y-\frac{5}{6}x-c \;+\; y-\frac{7}{8}z+\frac{8}{3}x \;=$

d) $(a - b) + (b - c) + (c - d) =$

e) $(3p + 4q - r + 2) + (-3p - 4q + r - 2) + (3q + 4p + r - 2) =$

f) $(x + y - z) - (2x + 3y - z) =$

g) $(a + b + c - 1) - (-a - b - c - 1) =$

h) $(p-q-2+r)- \;\; 3p-4.5q-r+\frac{4}{5} \;=$

i) $(x + y + z + 1009) - (x + y + x - 1009) =$

j) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y \;-\; \frac{4}{5}x-\frac{6}{7}y \;=$

2. Compartan sus respuestas.

a) En caso de encontrar respuestas distintas, determinen cuáles fueron los pasos del procedimiento con los que tuvieron problemas.
b) Revisen si aplicaron correctamente la ley de los signos para la suma y la resta.
c) Si alguno de sus compañeros tiene dudas o no comprende un inciso, ayúdenlo y explíquenle cómo lo resolvieron.
d) Respondan, ¿qué ocurre con los signos de los monomios dentro de paréntesis si hay un signo menos antes? ______________________

____

____

____

InfórMate

La **suma de polinomios** se consigue quitando los paréntesis y reduciendo los términos semejantes que surjan.

Ejemplo:

Para sumar los polinomios

$$(2a + 3b - c) + (5a - 3b - 7c)$$

Eliminamos los paréntesis: $2a + 3b - c + 5a - 3b - 7c =$

Agrupamos los términos semejantes: $2a + 5a + 3b - 3b - 7c =$

Hacemos las simplificaciones: $7a - 8c$

La resta de polinomios se obtiene cambiando los signos al sustraendo y se hace una suma de polinomios con el minuendo.

Ejemplo:

Para restar los polinomios

$$(10a - 3b - 5c) - (2a + 8b - 7c)$$

Cambiamos los signos de los términos dentro del segundo paréntesis:	$10a - 3b - 5c + (-2a - 8b + 7c) =$
Eliminamos los paréntesis para hacer la suma:	$10a - 3b - 5c - 2a - 8b + 7c =$
Agrupamos los términos semejantes:	$10a - 2a - 3b - 8b - 5c + 7c =$
Hacemos las simplificaciones:	$8a - 11b + 2c$

Esta información te puede servir para verificar las respuestas de tu actividad anterior, por si tienes alguna duda.

Multiplicación de expresiones algebraicas

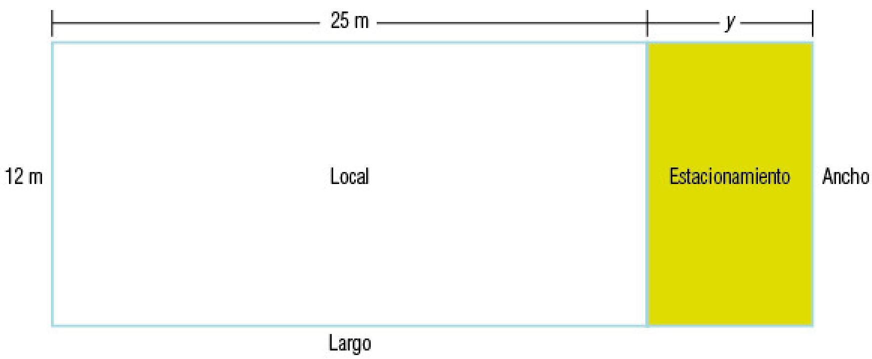
Imagen 8.1 La planeación de una construcción necesita conocimiento matemático.

Actividad 8

1. Lean la siguiente situación.

Lorena es una empresaria y compró un terreno para construir un negocio. Este terreno mide 25 m de largo y 12 m de ancho.

Ella observa que no le alcanzará el espacio para un estacionamiento, así que compra un terreno aledaño de y metros más de largo con la misma medida de ancho. El plano del terreno total del negocio, incluyendo el local y el estacionamiento, se muestra en la siguiente figura.



2. Respondan las preguntas.

a) ¿Cuál es el área que tendrá el local? ______________________

b) ¿Cómo se representará algebraicamente el área del terreno donde se construirá el estacionamiento? ______________________

Relaciona

En la lección anterior de este libro se describe cómo saber si dos expresiones algebraicas son equivalentes. Te invitamos a leer las secciones "Infórmate" de esa lección para recordar el tema.

c) Si sumamos las expresiones obtenidas en los incisos a) y b), ¿obtenemos el área del terreno total del negocio, es decir, incluyendo el local y el estacionamiento? Expliquen su respuesta. ______

d) ¿Cómo expresan algebraicamente la medida que tendrá de largo el terreno del negocio, es decir, incluyendo el local y el estacionamiento? ______

e) ¿La multiplicación $12(25 + y)$ representa el área del terreno total que ocupará el negocio? Argumenten. ______

f) De acuerdo con sus respuestas de los incisos c) y d), ¿podríamos decir que las expresiones $300 + 12y$ y $12(25 + y)$ son equivalentes? Expliquen su respuesta. ______

3. **Comparen sus respuestas con las de otros equipos.**

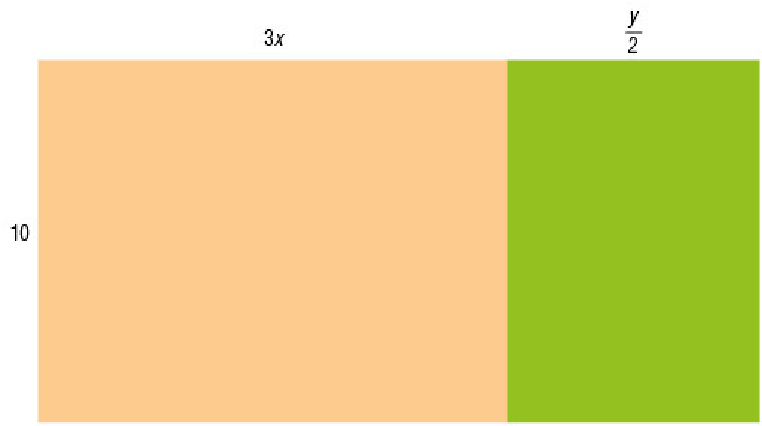
   a) ¿Lograron las mismas respuestas? ¿Cuáles fueron las diferencias? ¿Qué necesitan ajustar para coincidir con sus demás compañeros?

4. **Consulten a su docente en caso de que sus respuestas sean diferentes y no hayan logrado un acuerdo respecto a las respuestas que consideran correctas y sus procedimientos.**

Actividad 9

1. **Analicen los siguientes rectángulos y realicen lo que se indica en cada caso.**

   a) El siguiente rectángulo se ha dividido en dos rectángulos menores.



- ¿Cuánto mide el área del rectángulo naranja? ______
- ¿Cuánto mide el área del rectángulo verde? ______

- Completen la siguiente frase:

  El rectángulo completo tiene base igual a ____________ y su altura es igual a ____________.

- De acuerdo con el punto anterior, ¿cuál es el área del rectángulo completo?

  ____

- Analicen si la igualdad es cierta. Justifiquen su respuesta.

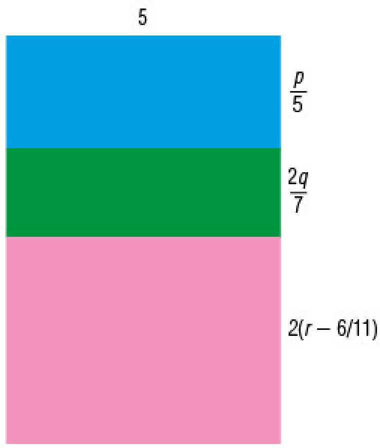
  Área del rectángulo mayor = Área del rectángulo naranja + Área del rectángulo verde

  ____

- La equivalencia anterior expresada algebraicamente es:

  ____________ = ____________ + ____________

b) Si tienen un rectángulo que se ha dividido en tres rectángulos menores como el siguiente:



- ¿Cuál es el área de cada rectángulo menor?

  Área del rectángulo azul: ____________.

  Área del rectángulo verde: ____________.

  Área del rectángulo rosa: ____________.

- ¿Cuánto mide el área del rectángulo completo? ____________

- Respondan, ¿es cierta la siguiente igualdad? Justifiquen su respuesta.

  Área del rectángulo = Área del rectángulo azul + Área del rectángulo verde + Área del rectángulo rosa

  ____

Relaciona

Es necesario que consideres las reglas de los signos para la multiplicación, las cuales se analizaron en la lección 2 de este libro.

- La equivalencia anterior expresada algebraicamente es:

_______________ = _______________ + _______________ + _______________

2. **Preparen una exposición para explicar cómo determinaron el área total de la figura, sin hacer las sumas de las porciones de áreas.**

3. **Compartan sus resultados con el resto del grupo.**

a) Expongan, con la guía de su docente. Es importante que argumenten sus respuestas.

b) Comenten, en plenaria, las exposiciones y qué procedimiento les pareció el más adecuado para determinar el área y por qué.

InfórMate

Multiplicación de una constante por un polinomio

La multiplicación de una constante por un polinomio obedece a la propiedad distributiva de la multiplicación. En estos casos este factor multiplica o se distribuye entre cada una de las expresiones que estén dentro del paréntesis multiplicando a los coeficientes de cada término.

Ejemplo:

Al realizar las siguientes multiplicaciones:

a) $-3(4x - 5y + 2)$ y b) $-\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}a-\frac{2}{3}b+\frac{7}{5}c-3$

Para el inciso a), de acuerdo con la propiedad distributiva, se tiene:

$$-3(4x - 5y + 2) = -3(4x) - 3(-5y) - 3(2)$$

Multiplicando de acuerdo con las reglas de los signos correspondientes se obtiene:

$$-3(4x - 5y + 2) = -3(4x) - 3(-5y) - 3(2) = -12x + 15y - 6$$

Para el inciso b) se siguen las mismas pautas, salvo que se multiplican las fracciones como es debido:

$$-\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}a-\frac{2}{3}b+\frac{7}{5}c-3 = -\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}a\ -\frac{3}{4}\ -\frac{2}{3}b\ -\frac{3}{4}\ \frac{7}{5}c\ -\frac{3}{4}(-3)$$

$$= -\frac{15}{24}a+\frac{6}{12}b-\frac{21}{20}c+\frac{9}{4}$$

$$= -\frac{15}{24}a+\frac{1}{2}b-\frac{21}{20}c+\frac{9}{4}$$

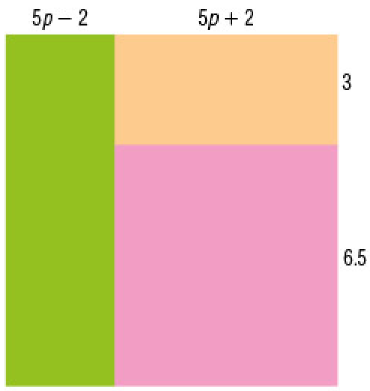
Glosario

Propiedad distributiva. Propiedad de la igualdad que establece que multiplicar una suma por un número es lo mismo que multiplicar cada sumando por el número y después sumar los productos, esto es:

$a(b + c) = ab + ac$

Actividad 10

1. **Hagan lo que se les pide en cada caso respecto al siguiente rectángulo.**



a) Calculen el perímetro de cada uno de los rectángulos: verde, rosa y naranja, y escríbanlo sobre las líneas.

- Perímetro del rectángulo verde: ______________________.
- Perímetro del rectángulo rosa: ______________________.
- Perímetro del rectángulo naranja: ______________________.

b) Calculen el área de cada uno de los rectángulos: verde, rosa y naranja, y anótenla.

- Área del rectángulo verde: ______________________.
- Área del rectángulo rosa: ______________________.
- Área del rectángulo naranja: ______________________.

c) Escribe a continuación cuánto mide la base y cuánto la altura del rectángulo completo. ______________________

____

d) Calculen el área del rectángulo completo y anótenla a continuación. Reduzcan los términos semejantes. ______________________

____

e) El área del rectángulo completo se puede expresar como la suma de las áreas de los rectángulos menores. Algebraicamente esto se expresa como:

__________ = __________ + __________ + __________

2. **Comparen sus resultados.**

a) Argumenten cómo los obtuvieron.

b) Planteen otra expresión equivalente al área del rectángulo completo. __________

____

____

c) ¿Esta expresión es equivalente a las expresiones del punto anterior? Expliquen por qué sí o por qué no. ______________________

____

____

3. **Nombren a un representante del equipo para que exponga ante el grupo cómo resolvieron los incisos anteriores.**

4. **Expongan y comparen sus resultados con los de otros equipos.**

   a) En caso necesario acudan con su docente para aclarar las dudas que tengan.

5. **Escriban en su cuaderno una conclusión respecto a la multiplicación de expresiones algebraicas por una constante y el procedimiento para resolverla.**

Actividad 11

1. **Multiplica por la constante dada.**

   a) $-3\,(x + y - 7) =$

   b) $7.5\,(4.2r - 3.4s + 3t) =$

   c) $4\quad 4a - 7c + \frac{1}{4}\quad =$

   d) $-5.5\quad x + 2y - \frac{5}{8}\quad =$

   e) $\frac{7}{11}(24a - 5b - 11) =$

   f) $\pi\quad x - 5z + \frac{4}{\pi}\quad =$

   g) $-2(a - b) + 2(b - a) =$

   h) $\frac{6}{5}\quad \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 1\quad =$

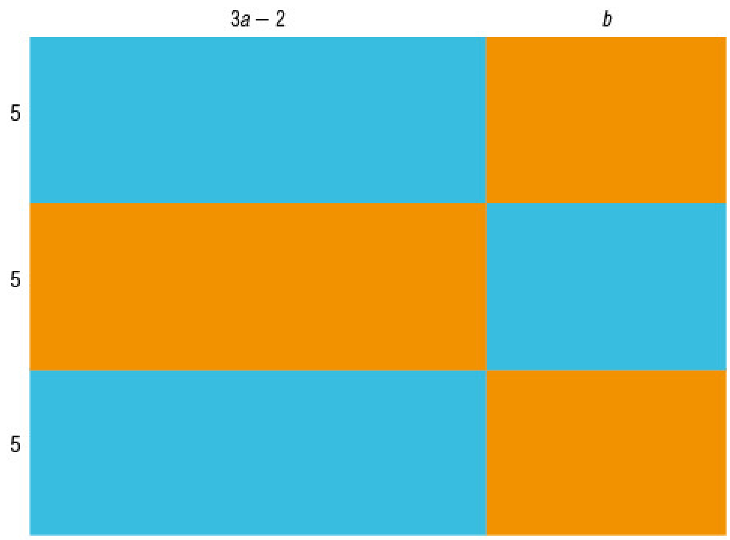
   i) $-9\quad -\frac{1}{3}ab + 3a - 2b\quad =$

2. **Compartan sus respuestas con el grupo y expliquen sus procedimientos para resolver las multiplicaciones.**

Pausa en el camino

Actividad 12

1. Analiza el rectángulo y realiza lo que se plantea.



a) ¿Cuánto mide de largo y de ancho el rectángulo completo?

b) ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo completo?

c) Escribe dos expresiones equivalentes a la anterior que también representen el perímetro del rectángulo.

d) ¿Cuánto mide de largo y de ancho cada rectángulo, naranja y azul, respectivamente?

e) ¿Cuánto mide el área de cada rectángulo, naranja y azul, respectivamente?

f) ¿Cuánto mide el área del rectángulo completo?

g) Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes a la anterior que también representen al área del rectángulo completo.

2. Verifiquen si sus respuestas coinciden o no.

a) En ambos casos, comenten su procedimiento y determinen cuál les resulta el más adecuado para resolver lo que se pide.

b) Corrijan aquellos aspectos que consideran que pueden ayudarles a mejorar su procedimiento y obtener el resultado correcto.

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

Mosaicos con triángulos

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Inicio del camino

Actividad 1

Glosario

Adocreto. Pieza de hormigón o cemento en forma de polígono utilizada para pavimentar.

1. **Lean la siguiente situación.**

   Mauricio utilizará adocretos cuadrados y en forma de triángulos equiláteros para cubrir su terraza rectangular. Antes de comprar el material representará en hojas blancas los diseños que puede obtener. Ayúdenle creando un diseño.

2. **Consigan los siguientes materiales:**
   - Una hoja blanca
   - Tijeras
   - Pegamento
   - Hojas de colores
   - Compás
   - Regla

3. **Realicen lo siguiente.**
   a) Dibujen en las hojas de colores, suficientes triángulos equiláteros y cuadrados de 3 cm de lado. Utilicen la regla y el compás para trazarlos y luego, recórtenlos.
   b) Coloquen los triángulos y cuadrados sobre la hoja en blanco haciendo coincidir sus vértices sin dejar espacios ni sobreponerlos o cortarlos aunque sobresalgan del borde de la hoja.
   c) Encuentren un patrón para cubrir la hoja blanca.
   d) Una vez que descubran el patrón, peguen las figuras en la hoja blanca.

Relaciona

Recuerda que en *Matemáticas* de primer grado de secundaria analizaste la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determinaste y usaste los criterios de congruencia de triángulos. Aprovecha este conocimiento para la comprensión de esta lección.

4. **Contesten en su cuaderno.**
   a) ¿Qué dificultades enfrentaron al crear su diseño?
   b) Observen su diseño, ¿qué combinaciones de figuras se unen en un vértice?
   c) ¿Se puede cubrir la terraza sólo con triángulos equiláteros? ¿Por qué?
   d) ¿Y con cuadrados? ¿Por qué?
   e) ¿Coinciden en un vértice dos cuadrados y tres triángulos? ¿Por qué?
   f) ¿Creen que si Mauricio prueba con otros polígonos regulares para su diseño, puede cubrir su terraza sólo con hexágonos?, ¿y con pentágonos?
   g) ¿Con cuáles polígonos regulares Mauricio puede cubrir mejor su terraza?

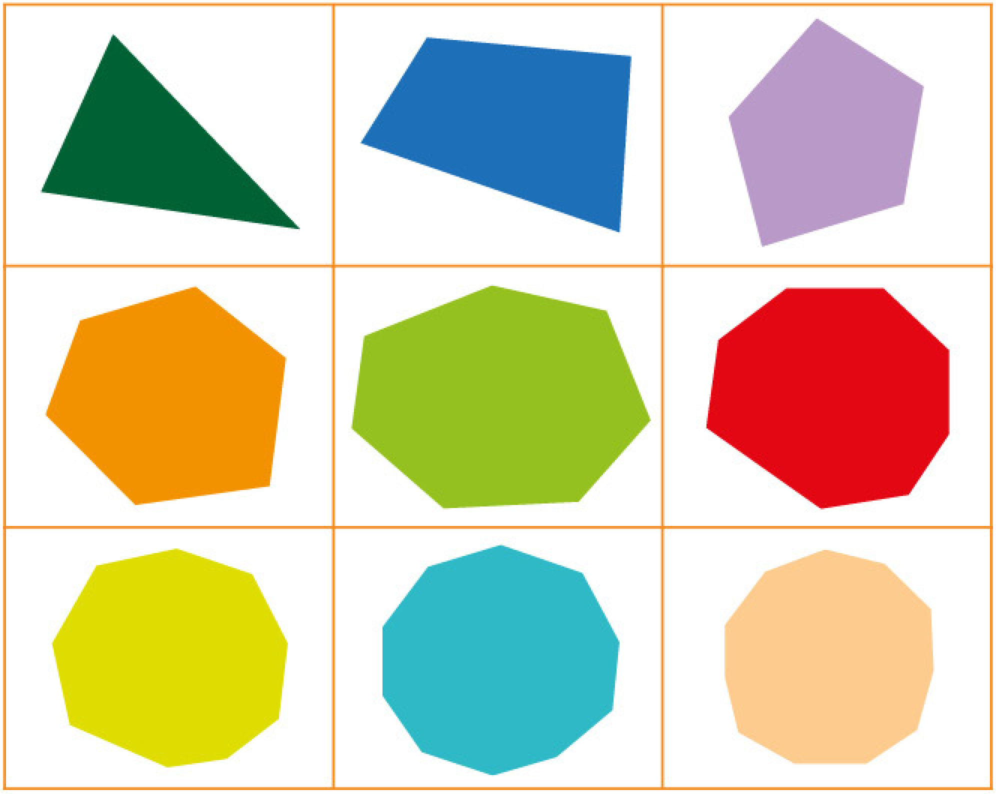
5. **Intercambien sus diseños con otras parejas y respondan.**
   a) ¿De qué depende que se puedan unir las figuras sin dejar espacios?
   b) ¿Es necesario conocer el valor de los ángulos internos de las figuras? ¿Por qué?
   c) ¿Qué otros casos emplean las relaciones de ángulos de polígonos?

Ruta del saber

Diagonales de polígonos

Actividad 2

1. Tracen en cada polígono las diagonales que puedan dibujarse desde uno de sus vértices.



2. Completen la siguiente tabla de acuerdo con los trazos que hicieron en las figuras anteriores.

Polígono	Cantidad de lados (n)	Cantidad de diagonales desde un vértice (d)	$n - d$
Triángulo	3		
Cuadrilátero			
Pentágono	5		
Hexágono			
Heptágono			$7 - 4 = 3$
Octágono			
Nonágono			
Decágono			
Undecágono			

Glosario

Vértice. Punto donde se unen dos lados de un ángulo.

Relaciona

El reconocimiento de la simetría en tu cuerpo te permite realizar varias acciones. En *Artes* de segundo grado utilizarás los ejes y segmentos corporales para reconocer la alineación correcta del cuerpo. ¡A danzar se ha dicho!

3. **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.**

   a) Revisen que los trazos de las diagonales sean correctos. Argumenten.
   b) Observen si todos sus compañeros trazaron las diagonales a partir del mismo vértice que ustedes.
   c) Comenten, ¿se modifican las respuestas de la tabla si se usan diferentes vértices de las figuras? ¿Por qué?

Actividad 3

1. **Respondan basándose en los polígonos de la actividad anterior.**

   a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice en un polígono de 12 lados? ______
   b) Con base en la tabla, ¿cuánto vale $n - d$ si n es el número de lados del polígono? ______
   c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un polígono de 50 lados? ______

2. **Escriban una fórmula para encontrar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un polígono de *n* lados.**

3. **Intercambien su fórmula con otro equipo y utilícenla para hallar el número de diagonales de un polígono.**

4. **Compartan sus respuestas.**

   a) ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿A qué creen que se debe?
   b) ¿Apareció el número tres de manera constante en todos los cálculos?
   c) ¿Les fue posible encontrar el número de diagonales con la fórmula de sus compañeros? ¿Por qué?
   d) Si hay diferencias en las respuestas, soliciten ayuda a su docente.

De interés

Es importante no confundir la diagonal de un polígono con el eje de simetría. Este último es la línea que divide al polígono en dos partes iguales, pero no necesariamente pasa por los vértices.

Un polígono no necesariamente tiene eje de simetría, aunque sí tiene diagonales.

InfórMate

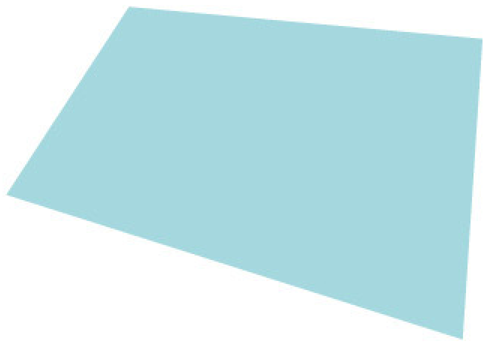
En un polígono de n lados, el número de diagonales (d) que se puede trazar desde un vértice está dado por la relación:

$$d = n - 3$$

Actividad 4

1. **Lean el siguiente problema.**

El docente pidió a María y a Juan contar todas las diagonales que se pueden trazar en el cuadrilátero que se presenta a continuación.



Las respuestas que dieron son las siguientes.

- María. —Sólo es posible trazar 2 diagonales distintas.
- Juan. —Se pueden trazar 4 diagonales diferentes, pues desde cada vértice es posible dibujar una diagonal.

2. **Respondan, ¿quién tiene razón y por qué?**
3. **Completen la siguiente tabla para determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde los vértices de un polígono.**

a) Apóyense trazando todas las diagonales de los polígonos que se presentan en la actividad 2.

Polígono	Cantidad de lados	Cantidad de vértices	Cantidad de diagonales diferentes que pueden trazarse desde todos los vértices
Triángulo	3		0
Cuadrilátero	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octágono	8		

De interés

Los polígonos se pueden dividir de acuerdo con la cantidad de lados y también según la longitud de sus lados. En este último caso se tiene que los polígonos pueden ser: regulares, cuando tienen lados iguales y ángulos internos iguales; e irregulares, cuando sus lados y ángulos internos son diferentes.

4. **Comparen sus respuestas.**

a) Si no llegaron a las mismas respuestas, averigüen la razón y corríjanlas.
b) Recuerden que deben trazar y contar las diagonales una sola vez.

InfórMate

El total de diagonales (D) que se pueden trazar en un polígono de n lados desde todos los vértices, está dado por la relación:

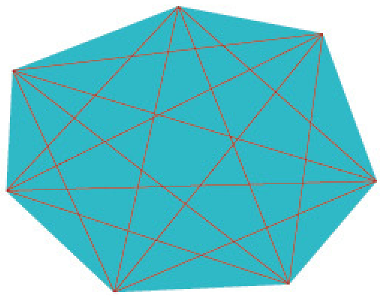
$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ejemplo:

Calcula y representa el total de diagonales que es posible dibujar en un heptágono. La relación para esto es $D = \frac{n(n-3)}{2}$, y como se trata de un heptágono, sabemos que $n = 7$. Entonces, al sustituir este valor en la relación, se tendrá:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7(4)}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Es decir, en un heptágono se puede trazar un total de 14 diagonales. Gráficamente esto se observaría de la siguiente manera. ¿Puedes contar las 14 diagonales?



Ángulos de polígonos

Polígonos irregulares

Actividad 5

1. **Retomen los polígonos en los que trazaron las diagonales desde un vértice y completen la tabla siguiente.**

Polígono	Cantidad de lados (n)	Número de triángulos que se forman (t)	$n - t$
Triángulo	3		$3 - 1 = 2$
Cuadrilátero	4		
Pentágono			
Hexágono	6		
Heptágono	7	5	
Octágono	8		
Nonágono			
Decágono	10		
Undecágono	11		

2. **Respondan en su cuaderno.**

   a) ¿Cuánto vale la diferencia $n - t$, sin importar la cantidad de lados?

3. **Escriban una fórmula que les permita hallar el número de triángulos que se forman al dividir un polígono con las diagonales desde un vértice. Consideren la respuesta anterior.**

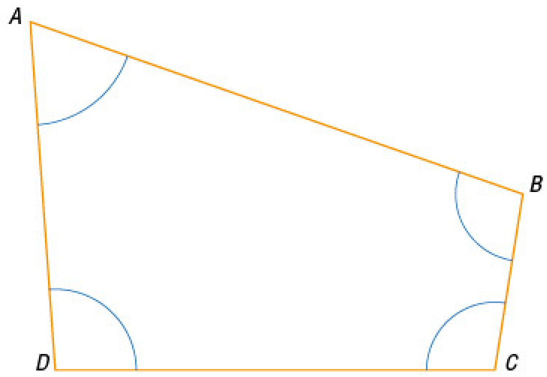
4. Compartan con otra pareja qué procedimiento y elementos utilizaron para elaborar su fórmula.

a) Comenten si despejaron la variable t, por qué y cómo lo hicieron.
b) Pidan apoyo a su docente para explicar sus respuestas.

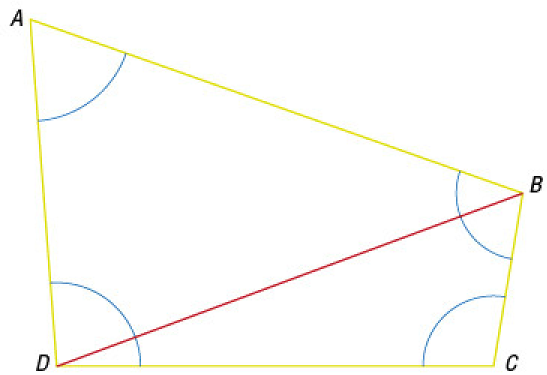
Actividad 6

1. Lean las siguientes secuencias de razonamientos y contesten lo que se pide.

a) Se quiere calcular la suma de los ángulos internos del polígono irregular que se muestra en la siguiente imagen, esto quiere decir que se quiere hallar el valor de: ______



b) Si se traza una diagonal desde el vértice D hasta el B, como se muestra en la imagen que sigue, ¿cuántos triángulos se forman? ______



c) De acuerdo con la imagen del inciso b, los ángulos se renombran con números dado que los ángulos $\angle B$ y $\angle D$ quedan divididos. Escriban los números que corresponden con cada ángulo. Pongan atención en $\angle B$ y $\angle D$.

$\angle A = \angle$ ______

$\angle B = \angle 2 + \angle$ ______

$\angle C = \angle$ ______

$\angle D = \angle$ ______ $+ \angle$ ______

Y entonces se cumple que:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 1 +$ ______ $+$ ______ $+ 6 +$ ______ $+$ ______

Y tú, ¿qué harías?

Formar parte de un grupo de amigos o de un equipo te puede hacer sentir bien al compartir opiniones y experiencias. Sin embargo, hay algunos que son muy diferentes a ti, ¿qué harías para conocer a otros compañeros del salón o incluso de la escuela? ¿Crees que esto te permite crecer cómo ser humano? ¿Por qué?

d) Agrupen los ángulos que pertenecen al triángulo I y los del triángulo II que se forman en la imagen del inciso b) y escríbanlos a continuación.

$$= (\_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_) + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_)$$

e) Como los ángulos agrupados en el paso anterior son los ángulos internos de los triángulos I y II, respectivamente, cada grupo de ángulos suma 180°, por lo tanto la expresión anterior también es igual a:

$$= 180° + 180° = \_\_\_\_\_\_$$

f) Entonces se tiene que:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \_\_\_\_\_\_$$

2. **Comparen su cadena de igualdades con apoyo del docente.**

a) Expliquen su procedimiento y acuerden cuál es la respuesta correcta.
b) Comenten, si el cuadrilátero fuera distinto, ¿la suma de sus ángulos internos también sería de 360° o podría ser otro valor? ¿El valor calculado dependería de la longitud de los lados del cuadrilátero?

Actividad 7

1. **Completen la tabla siguiente con base en el trazo de diagonales y triangulaciones de polígonos.**

Polígono	Número de lados	Número de triángulos	Suma de los ángulos internos
Triángulo		1	
Cuadrilátero			360°
Pentágono	5		
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			
Nonágono			

2. **Respondan en su cuaderno.**

a) ¿Cuál es el número que multiplica a 180° en la última columna?
b) ¿Cómo se obtiene?
c) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de 40 lados?

3. **Compartan sus resultados de la tabla anterior.**

a) Expliquen cómo hallaron la suma de los ángulos internos de un polígono de 40 lados, ¿utilizaron el número de triángulos en que se puede dividir?
b) Si algún compañero tiene dificultades, apóyenlo para resolver sus dudas.

InfórMate

Para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados se utiliza la relación:

$$S\angle i = 180° \,(n - 2)$$

Donde $S\angle i$ representa la suma de todos los ángulos internos del polígono. La expresión $n - 2$ indica el número de triángulos en los que se puede dividir un polígono de n lados.

Los ángulos internos de un polígono regular son iguales entre sí. Por ejemplo, si se quiere saber la suma de ángulos internos de un polígono de 15 lados, entonces $n = 15$, y al sustituir en la fórmula anterior se tiene:

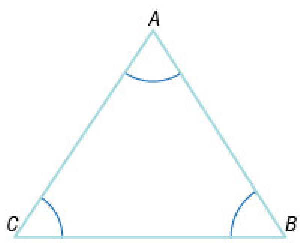
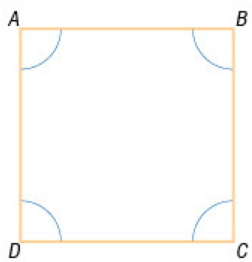
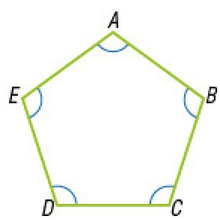
$$S\angle i = 180° \,(n - 2) = 180° \,(15 - 2) = 180° \,(13) = 2\,340°$$

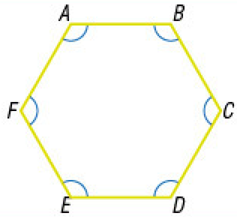
Por tanto, la suma de los ángulos internos de un polígono de 15 lados es 2 340°.

Polígonos regulares

Actividad 8

1. **Completen la tabla siguiente.**

Polígono regular	Imagen	Suma de los ángulos internos	Medida de cada uno de los ángulos internos
Triángulo equilátero		$S\angle i =$	$\angle i =$
Cuadrado		$S\angle i =$	$\angle i =$
Pentágono		$S\angle i =$	$\angle i =$

Polígono regular	Imagen	Suma de los ángulos internos	Medida de cada uno de los ángulos internos
Hexágono		$S\angle i =$	$\angle i =$

2. **Comparen sus respuestas.**
   a) Expliquen el procedimiento que emplearon para obtener la medida de los ángulos internos de cada polígono regular.
   b) Comenten si consideran que los ángulos internos de un polígono regular son iguales entre sí y el porqué.

Actividad 9

1. **Expresen una fórmula para medir los ángulos internos de un polígono regular y que permita calcular la medida de cada uno de los lados.**
   a) Consideren que la fórmula les permita obtener resultados de cualquier polígono por más grande que éste sea y sin necesidad de hacer dibujos.
   b) Empleen los procedimientos y la fórmula que elaboraron para medir un ángulo interno de un polígono.

PARA TIC

Para comprobar si el resultado de la fórmula es correcto, te invitamos a utilizar la herramienta de Geogebra, particularmente con el uso de polígonos en:

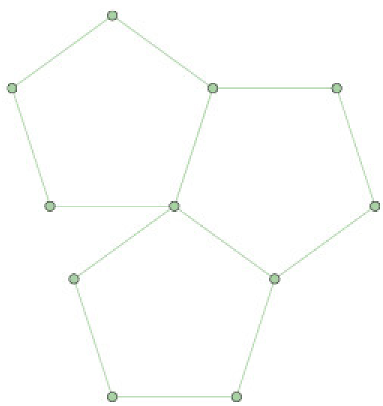
https://bit.ly/2AIvw0o

(Consulta: 7 de mayo de 2018).

2. **Intercambien sus análisis que los llevaron a determinar la fórmula.**
   a) Comprueben si obtuvieron el mismo resultado y si coinciden los valores.
   b) En caso de existir diferencias analicen las fórmulas y, con ayuda del docente, definan cuáles son correctas.

Actividad 10

1. **Retomen la actividad 1 y respondan en su cuaderno.**
   a) ¿Cuánto mide cada ángulo interno de un triángulo equilátero y cuánto cada ángulo interno de un cuadrado?
   b) ¿Cuánto deben sumar los ángulos de las figuras que coinciden en un vértice?
   c) ¿Cuánto mide el espacio que queda si se unen tres pentágonos en un vértice? Observa la imagen siguiente.



2. **Elaboren un nuevo patrón considerando lo siguiente:**

   a) Elijan y utilicen la combinación de dos polígonos regulares, por ejemplo, octágonos y cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos.

3. **Respondan.**

   a) ¿Se puede combinar dos polígonos regulares cualesquiera?
   b) ¿Es posible crear un patrón utilizando pentágonos y triángulos equiláteros? O ¿hexágonos y octágonos? ¿Por qué?

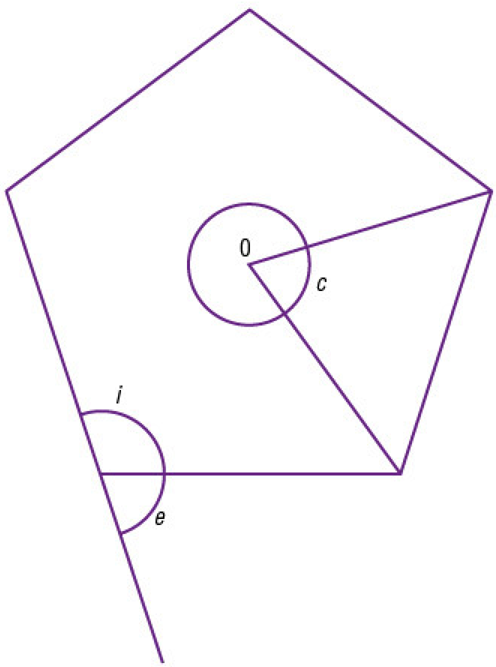
4. **Expongan, con apoyo de su docente, sus respuestas y el patrón que crearon.**

5. **Analicen sus patrones y respondan:**

   a) ¿Todos coinciden en la respuesta al inciso b) del punto 1?
   b) ¿Obtuvieron 360º en algún momento?
   c) En caso de existir diferencias, soliciten la guía de su docente.

Actividad 11

1. **Observen y analicen el siguiente polígono.**



2. **Completen los siguientes razonamientos para encontrar el valor del ángulo central ($\angle c$) y del ángulo externo ($\angle e$) del polígono anterior.**

   a) El ángulo interno, $\angle i$, y su ángulo externo, $\angle e$, forman un ángulo llano, es decir,

   $\angle i + \angle e =$ ______________________________ .

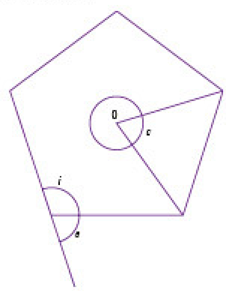
   Por tanto, si se conoce el ángulo interno, entonces el externo es:

   $\angle e =$ ______________________________

Glosario

Ángulo central. ($\angle c$). Es el que se forma con dos segmentos, llamados radios, que van del centro del polígono hacia dos vértices consecutivos.

Ángulo externo. ($\angle e$). Es el que se forma con un lado del polígono y la extensión de su lado adyacente.



b) El ángulo central forma parte del ángulo de 360° que gira en torno al centro del polígono. Como el pentágono es un polígono regular, sus 5 ángulos centrales miden lo mismo, entonces el valor de cada uno de ellos es: ______

$$\angle c = \frac{360°}{}$$

3. Calculen y escriban en su cuaderno la medida de los ángulos internos, central y externo de los siguientes polígonos regulares: octágono y dodecágono.

a) Empleen razonamientos similares a los descritos para el pentágono.

4. Compartan sus respuestas.

a) Expliquen qué son los ángulos internos, centrales y externos de un polígono.
b) Comenten qué procedimientos emplearon para calcular las medidas de los ángulos internos, centrales y externos para el octágono y el dodecágono.
c) Si un compañero tiene dudas, apóyenlo para aclararlas.

InfórMate

En un polígono regular de n lados, el valor de cada uno de sus ángulos centrales, internos y externos, está dado por las relaciones

$$\angle c = \frac{360°}{n}$$

$$\angle e = \frac{360°}{n}$$

$$\angle e + \angle i = 180°$$

Por ejemplo, las medidas de estos tres ángulos en un pentágono regular ($n = 5$) son:

$$\angle c = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$\angle e = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$\angle i = 180° - \angle e = 180° - 72° = 108°$$

PARA TIC

Visita el siguiente enlace en donde podrás ver la construcción de polígonos regulares utilizando sólo compás y regla.

https://bit.ly/2qoJRbD

(Consulta: 27 marzo de 2018).

Construcción de polígonos

Actividad 12

1. Dibujen, en una hoja blanca, un hexágono regular que mida 7 cm de lado y sigan los pasos que se indican.

a) Determinen cuánto mide un ángulo interno en un hexágono.

b) Tracen con lápiz un ángulo con la medida que establecieron en el inciso a), pero consideren que cada uno de los lados del ángulo debe medir 7 cm.

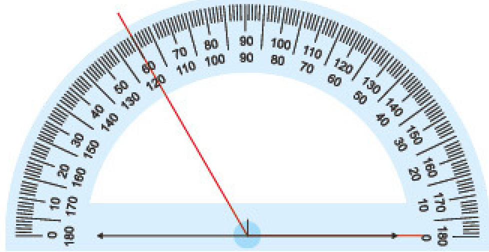


Imagen 9.1

c) En cada uno de los extremos del ángulo interior, dibujen otro ángulo de la misma medida y cuyos lados también midan 7 cm. En este momento se tendrán los cuatro lados del polígono (imagen 9.2).

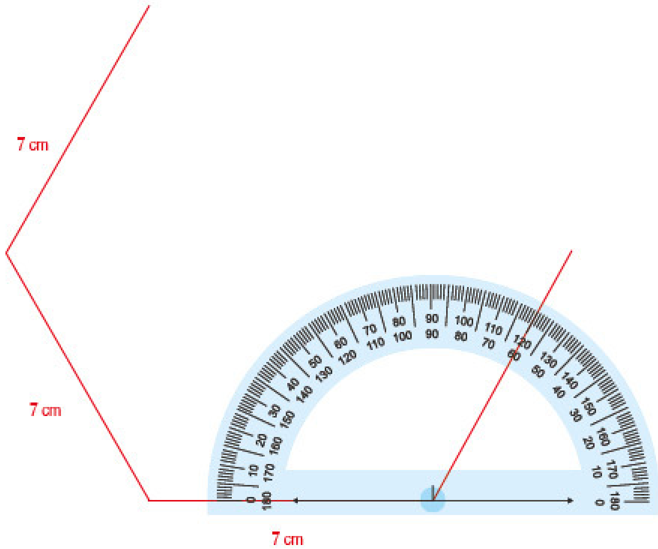


Imagen 9.2

d) Continúen hasta terminar el polígono (imágenes 9.3 y 9.4).

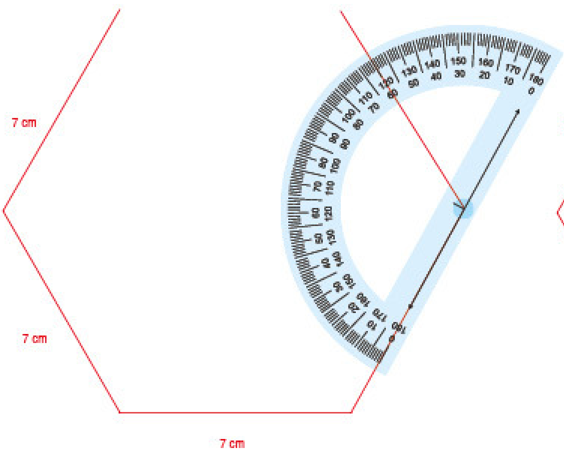


Imagen 9.3

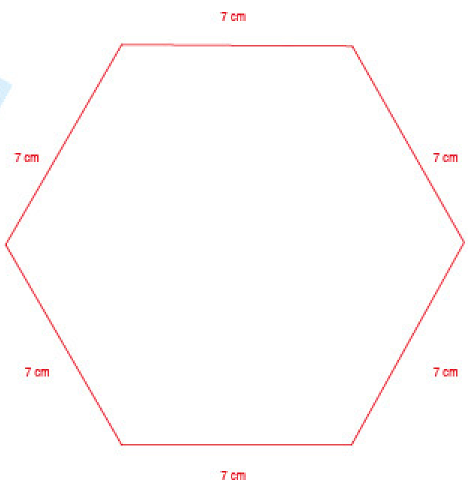


Imagen 9.4

2. **Presenten al grupo el polígono que dibujaron.**

   a) Verifiquen con la guía de su docente que, en efecto, los lados del polígono son iguales y que miden 7 cm.

Actividad 13

1. **Dibujen, en el siguiente espacio, un polígono regular cuyo ángulo central mida 40° siguiendo los pasos que se indican.**

Glosario

Polígono inscrito. Polígono interno a una circunferencia, cuyos vértices están sobre la misma.

   a) Tracen una circunferencia de cualquier radio dentro de la cual tracen el polígono solicitado, es decir, un polígono inscrito.
   b) Tracen un ángulo central de 40°. Para ello, empleen dos radios como los lados del ángulo. Los extremos de los radios serán los vértices del polígono (imágenes 9.5 y 9.6).

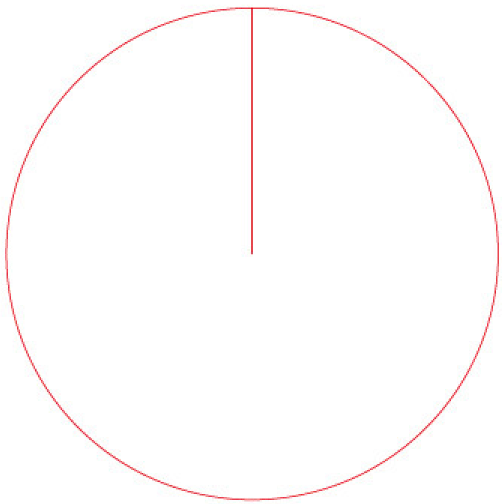


Imagen 9.5

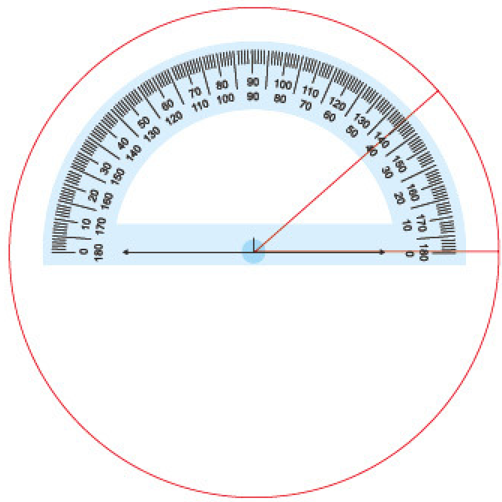


Imagen 9.6

   c) Dibujen otros ángulos centrales de la misma medida usando cada lado del ángulo anterior.
   d) Continúen hasta tener todos los vértices del polígono. Unan dichos vértices para dibujarlo.

2. **Respondan, ¿qué polígono se formó?**

3. **Presenten al grupo el polígono que dibujaron.**

   a) Verifiquen, con ayuda de su docente, que en efecto, los lados de su figura son iguales y que los ángulos centrales miden 40°.
   b) En caso de que no sea así, verifiquen la razón y si algún compañero tiene dudas, apóyenlo para resolverlas.

Pausa en el camino

Actividad 14

1. **Responde las siguientes preguntas.**
   a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un icoságono? Utiliza el siguiente espacio para trazarlo y responder.

Glosario

Icoságono. Polígono que tiene veinte lados.

   b) ¿En qué polígono se pueden trazar exactamente 9 diagonales desde uno sólo de sus vértices?
   c) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de 25 lados?
   d) ¿En qué polígono la suma de sus ángulos internos es igual a 1 620º?
   e) ¿Cuánto miden los ángulos internos y central de un polígono de 15 lados?

2. **Traza en el siguiente espacio, un octágono regular cuyo valor de sus lados sea igual a 8 cm. Emplea únicamente una regla, un compás o un semicírculo.**

3. **Compartan sus respuestas y su octágono.**
   a) Verifiquen sus procedimientos y si su octágono cumple con lo que se pide.
   b) Comenten cómo obtuvieron sus respuestas y argumenten por qué las consideran correctas.
   c) En caso de dudas, pregunten a su docente.

Lección **10**

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Magnitudes y medidas

Correr un kilómetro o mil metros, ¡qué dilema!

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos de metro, litro y kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean con atención.**

   Las antiguas civilizaciones, tales como la egipcia, asiria y griega, empleaban partes del cuerpo para realizar mediciones; entre ellas destacan el codo (distancia del codo hasta la punta de la palma abierta), el palmo (distancia entre la punta del pulgar y la del meñique con la mano abierta), la braza (longitud de los brazos extendidos), el pie (longitud de un pie humano), los dedos (el ancho de uno, dos, tres o cuatro dedos juntos) y la pulgada (longitud de un pulgar humano).

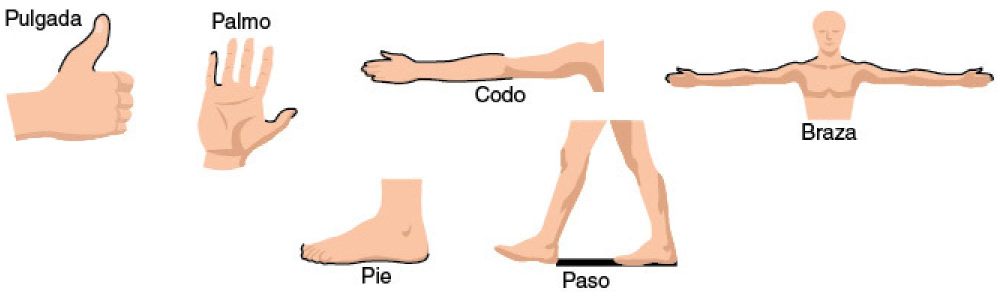


Imagen 10.1 En la antigüedad se utilizaron diferentes recursos para conocer las distancias y longitudes.

2. **Determinen las dimensiones internas de su salón de clases usando algunas partes del cuerpo de acuerdo con la siguiente tabla.**

   a) Efectúa las mediciones con la parte de tu cuerpo indicada a continuación, mientras que tu compañero las registra en la tabla.

   b) Comienza con brazas, si queda una parte que ya no puedes medir con esta unidad, utiliza los codos, luego los palmos y, por último, los dedos.

	Brazas		Codos		Palmos		Dedos
Largo del salón		+		+		+	
Ancho del salón		+		+		+	

De interés

Recuerda que en tu curso anterior de *Matemáticas* analizaste la relación entre el litro y el decímetro cúbico.

Esto te será de gran utilidad en el desarrollo de la presente lección.

3. **Comparen sus resultados con los de otra pareja y respondan.**

   a) ¿Existen diferencias entre los resultados de la tabla de la otra pareja y los suyos? ¿A qué se debe? __________

   b) ¿Cuál de esos resultados consideran correcto? ¿Qué procedimiento llevaron a cabo? __________

4. **Comenten qué otras unidades conocen para medir y escríbanlas en el pizarrón.**

Ruta del saber

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Unidades de medición

Actividad 2

1. **Elijan a un compañero por votación.**
   a) Empleen una tira de papel o un hilo.
   b) Con el papel o el hilo, midan la longitud de los brazos extendidos del compañero que eligieron, es decir, una braza, y guarden ese papel o hilo con dicha medida.
   c) Repitan los dos pasos anteriores, pero ahora, midan la longitud que hay del codo a la palma (codo) del compañero; otra vez, para medir la longitud que tiene su pie (pie) y, una más, para la anchura de uno de los dedos de la mano (dedo). De esta manera obtendrán cuatro tiras o hilos únicos o estándares.

2. **Midan, por turnos y con apoyo del docente, las dimensiones internas de su aula con cada una de las tiras o hilos y escríbanlas en la siguiente tabla.**

	Brazas		Codos		Palmos		Dedos
Largo del salón		+		+		+	
Ancho del salón		+		+		+	

3. **Intercambien su tabla con otro equipo y valoren lo siguiente:**
   a) ¿Qué diferencias existen entre los resultados de esta última tabla y la que realizaron en la actividad 1? ______________________________
   ____
   b) ¿Qué ventajas consideran que tiene el usar una unidad de medida estándar al llevar a cabo mediciones de longitud? ______________________________
   ____
   c) ¿Consideran necesario tener también una unidad de medida estándar para medir peso y volumen? Justifiquen su respuesta. ______________________________
   ____
   ____

PARA TI©

Consulta el siguiente enlace donde podrás practicar el Sistema Internacional de Unidades.

https://bit.ly/2HGxv55

(Consulta: 29 de abril de 2018).

InfórMate

Medir es comparar una propiedad física de un objeto con una unidad establecida, que se ha determinado como patrón o unidad de medida, para indicar cuántas veces la contiene un objeto. En tu vida cotidiana usas diferentes unidades de medida.

Medir el largo de un terreno significa conocer cuántas unidades de longitud (metros) caben en esa distancia del terreno. No tener una unidad de medida estándar llevaría a tener cantidades diferentes al realizar las mediciones, tal y como sucedió en la actividad inicial.

Glosario

Magnitud. Es la característica de un objeto o fenómeno físico que puede ser medido. Por ejemplo, la longitud de una persona o el peso de esta.

De interés

No se debe confundir la magnitud fundamental de masa con la de peso. Para la primera, la unidad de medida es el kilogramo (kg) y mide la cantidad de materia de un objeto; mientras que para la segunda, es el newton (N) y mide la fuerza gravitatoria que actúa sobre el objeto. Aunque la primera se emplea de forma común y general, es incorrecto.

Las magnitudes fundamentales en física se muestran en la siguiente tabla con sus unidades fundamentales y sus símbolos:

Magnitud fundamental	Unidad	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

El Sistema Internacional de Unidades (SI) consta de estas siete unidades básicas más los múltiplos y submúltiplos de las mismas.

Las unidades anteriores pueden combinarse para medir otras magnitudes, las unidades resultantes se conocen como unidades derivadas. Un ejemplo de magnitud derivada es el volumen que se mide a partir de conocer y multiplicar las medidas del largo, ancho y alto de un objeto. Esta magnitud tiene como unidad de medida al metro cúbico y se simboliza por m^3. Otras magnitudes derivadas son la velocidad, la fuerza y la presión. Es importante señalar la diferencia entre los términos volumen y capacidad: el volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa y la capacidad es qué tanto puede contener un recipiente y se mide generalmente en litros o mililitros, simbolizados como l y ml, respectivamente, que si bien, estos dos últimos no pertenecen al SI, sí son aceptados como unidades de medida.

Múltiplos y submúltiplos

Actividad 3

1. **Responde.**

   a) Para realizar la actividad 2 de esta lección, ¿fue necesario emplear las medidas de palmos y dedos? Y si no las usaste, ¿cómo resolviste la actividad? ______

   ______

   b) ¿Consideras que fue de utilidad el tener medidas más pequeñas que las brazas al efectuar las mediciones de tu salón de clases en la actividad 2? ¿Por qué?

   ______

   ______

2. **Escriban las dimensiones de su salón únicamente en palmos.**

   a) Apóyense en las mediciones de la actividad 2.

   Largo del salón = ______ palmos

   Ancho del salón = ______ palmos

3. **Escriban en su cuaderno el procedimiento que realizaron para hallar esas cantidades.**

4. **Respondan de acuerdo con las mediciones de la actividad 2.**

a) ¿Qué relación numérica existe entre las brazas y los palmos?
b) ¿Cuál es la relación numérica que hay entre los codos y los palmos?

5. **Intercambien sus respuestas.**

a) Con apoyo del docente, comenten las relaciones numéricas que definieron entre las diferentes unidades de medidas y cómo las determinaron.

InfórMate

En ocasiones se requiere medir objetos muy pequeños, como el grosor de un cabello, o muy grandes, como la distancia que existe entre Mérida y Tijuana, lo cual resultaría complejo de realizar y expresar empleando el metro como unidad de medida.

Por ello, es útil emplear algunos múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida, que son las unidades más grandes o más pequeñas de éstas. Para nombrarlos se usan ciertos los prefijos que se indican en la tabla siguiente:

Submúltiplos			Múltiplos		
Número	Prefijo	Símbolo	Número	Prefijo	Símbolo
0.1	deci	d	10	deca	da
0.01	centi	c	100	hecto	h
0.001	mili	m	1 000	kilo	k
0.000001	micro	μ	1 000 000	mega	M
0.000000001	nano	n	1 000 000 000	giga	G
Ejemplos: Decí**metro** (dm) Centí**metro** (cm) Mili**gramo** (mg) Micro**segundo** (μs) Nano**segundo** (ns)			Ejemplos: Decá**metro** (dam) Hecto**gramo** (hg) Kiló**metro** (km) Mega**segundo** (Ms) Gigá**metro** (Gm)		

Así será posible emplear cualquier unidad y anteponer alguno de los prefijos de la tabla. Un kilómetro es equivalente a 1 000 metros pues la unidad metro tiene el prefijo kilo que es un factor de 1 000, es decir, se trata de un múltiplo del metro.

Por otro lado, un mililitro equivale a 0.001 litros pues la unidad litro tiene el prefijo mili que es un factor de 0.001, es decir, se trata de un submúltiplo del litro.

Por otro lado, la tonelada es una unidad de medida que no pertenece al SI, sin embargo se acepta su uso.

Debes recordar que el kilogramo es la unidad de masa del Sistema Internacional de Unidades y es la única unidad cuyo nombre, por razones históricas, contiene un prefijo, el kilo. Por tanto, los nombres y los símbolos de sus múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa se forman añadiendo los prefijos de la tabla anterior a la palabra gramos y los símbolos de estos prefijos al símbolo, por ejemplo, miligramo (prefijo: mili y palabra: gramo).

Glosario

Múltiplo. Unidad más grande que la unidad de medida de la que se deriva. Por ejemplo, el kilómetro es un múltiplo del metro pues contiene al metro 1 000 veces.

Submúltiplo. Unidad menor que la unidad de medida de la que se deriva. Por ejemplo, el decímetro es submúltiplo del metro pues es contenido 10 veces dentro del metro.

Prefijo. Término gramatical que se antepone a una palabra, por ejemplo, el prefijo "des" unido al verbo "heredar" cambia su significado a "desheredar".

Relaciona

Tu asignatura de *Lengua materna. Español* te permite comprender mejor la estructura de las palabras y la importancia gramatical de cada una, ¡porque hasta para entender matemáticas es necesario comprender las palabras.

Actividad 4

1. **Lean y respondan las preguntas en su cuaderno.**
   a) Si una tonelada equivale a 1 000 kg, ¿qué es mayor, 50 toneladas o 50 000 kg? ¿Por qué? ______
   b) Entre un kilogramo y una tonelada, ¿cuál hace referencia a una mayor cantidad de masa? ¿Por qué? ______
   c) Si un metro equivale a 100 centímetros, entonces cuál tiene mayor longitud, ¿un metro o un centímetro? ______

2. **Analicen la siguiente situación.**

   Se han estado llevando a cabo estudios para la conservación de la ballena jorobada que se reproduce en aguas de la costa occidental de la península de Baja California. Entre los estudios se analizan y comparan los pesos de las ballenas.

   En la tabla se presentan los pesos de una familia de ballenas y algunos ballenatos. Pero fueron anotados en dos unidades diferentes: en toneladas (ton) y en kilogramos (kg).

Glosario

Ballenato. Es el nombre que se le da a la cría de una ballena.

Ballena A	Ballena B	Ballena C	Ballena D	Ballenato A	Ballenato B
23 ton	35 ton	30.5 ton	18 ton	1200 kg	950 kg

3. **Respondan en su cuaderno con base en la situación anterior.**
   a) Para que sea más fácil comparar los datos de los pesos de esta familia, ¿qué se requiere?
   b) Considerando la relación entre los kilogramos y las toneladas dada en el numeral anterior ¿qué operaciones se realizarían para expresar los todos los datos de la tabla anterior todo en toneladas?
   c) ¿Se efectuaría la misma operación si por el contario se desean expresar todos los datos de la tabla en toneladas?
   d) ¿Qué operación se realizaría?

4. **Compartan sus respuestas.**
   a) Comenten las dudas y dificultades que se les presentaron
   b) Discutan sobre la necesidad de pasar las unidades entre múltiplos y submúltiplos.

InfórMate

Cuando se quiere convertir el valor de una unidad de medida entre sus múltiplos y submúltiplos se realizan los siguientes pasos:

1. Determinar la regla de equivalencia que las relaciona.
2. Expresar esta regla de equivalencia como una fracción que tiene como numerador a la unidad que se conservará y como denominador a la unidad que se cambiará.
3. Multiplicar el valor a convertir por la fracción creada realizando todas las operaciones.

Observa cómo se convierten 340 gramos a kilogramos de acuerdo con la tabla de la sección anterior Infórmate; la relación de equivalencia de gramos a kilogramos está dada por 1 kg = 1 000 g.

Como se quiere pasar de gramos a kilogramos, se debe conservar la unidad de kilogramos, por lo que la regla de equivalencia se expresa como fracción colocando la unidad de kilogramos en el numerador de la fracción y la unidad de gramos en el denominador, es decir, la fracción será:

$$\frac{1\ \text{kg}}{1\ 000\ \text{g}}$$

Se multiplica el valor a convertir por esta fracción para obtener el valor en la unidad deseada:

$$340\ \text{g} = \frac{1\ \text{kg}}{1\ 000\ \text{g}}\ \frac{340\ \text{kg}}{1\ 000} = 0.34\ \text{kg}$$

Observa cómo se convierten 12 hectómetros a centímetros.

La unidad de medida es el metro, así que primero se convierten los hectómetros a metros y luego los metros a centímetros. De acuerdo con la tabla de la sección anterior Infórmate, se tiene que 1 hm = 100 m y 1 cm = 0.01 m.

Al pasar de hectómetros a metros se desea conservar la unidad de metros, la regla de equivalencia se expresa en forma de fracción como:

$$\frac{100\ \text{m}}{1\ \text{hm}}$$

Ahora, para pasar de metros a centímetros, se desea conservar la unidad de centímetros, por lo que la regla de equivalencia se expresa en forma de fracción como:

$$\frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}}$$

Ahora, se multiplica el valor de 12 hectómetros por las fracciones anteriores, y se obtiene lo siguiente:

$$12\ \text{hm}\ \frac{100\ \text{m}}{1\ \text{hm}}\ \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = \frac{(12)(100)(100)\ \text{cm}}{(1)(1)} = 120\ 000\ \text{cm}$$

Por tanto, 12 hectómetros equivalen a 1 200 000 cm.

La siguiente tabla presenta las equivalencias más empleadas para cambios de unidades de medida de una magnitud.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Longitud	Milímetro	mm	1 m = 1 000 mm
	Centímetro	cm	1 m = 100 cm
	Decímetro	dm	1 m = 10 dm
	Kilómetro	km	1 km = 1 000 m
Masa	Gramo	g	1 kg = 1 000 g
Capacidad	Mililitro	ml	1 L = 1 000 ml

Y tú, ¿qué harías?

Es difícil hacer cambiar la opinión de alguien. Sin embargo, existen diversas razones por las que se puede cambiar de parecer.

Las preguntas son: ¿vale la pena cambiar de parecer por lo que he visto o me han dicho?, ¿me pueden persuadir con argumentos para cambiar de opinión?

De interés

El nivel de vuelo de un avión es la altitud según la presión que marque el altímetro, instrumento que mide la altura, a partir de más de 20 000 pies sobre el nivel medio del mar. Debido a que el nivel del mar es variable, cada país adopta un nivel del mar predeterminado.

Actividad 5

1. **Resuelvan los siguientes problemas de unidades de medida en su cuaderno.**

   a) La mesa del comedor de Alejandro tiene forma rectangular y mide 122 cm de largo por 88 cm de ancho. Si Alejandro comprará tela para elaborar un mantel que cubra completamente la mesa, ¿cuántos metros de tela debe comprar si la que le gustó tiene un ancho de 1.5 m?
   b) Se analiza el crecimiento de un árbol frutal al cambiar los mecanismos de fertilización sobre él. Si este árbol medía la semana pasada 1.24 m pero en esta última semana creció 12 mm, ¿cuál es la altura del árbol en metros?
   c) Manuel hace ejercicio de forma continua. Hace una semana se pesó y la báscula arrojó 78.76 kg. Esta semana se volvió a pesar y la báscula marcó 77.93 kg, ¿cuántos gramos bajó en esta semana?
   d) Con el fin de que los estudiantes de biología se den una idea de la pequeñez de una bacteria que mide 0.8 μm, su docente les pidió que convirtan a centímetros dicha medida. ¿A cuántos centímetros equivale?
   e) Josué compró una piscina portátil con una capacidad de 1 070 000 cm^3 de agua.Si un 1 l = 1 000 cm^3, ¿cuál es la capacidad en litros de la piscina de Josué?

2. **Compartan sus respuestas e identifiquen cómo las obtuvieron.**

   a) Con apoyo del docente, comenten el procedimiento que siguieron para obtener sus respuestas y las dificultades que enfrentaron.
   b) Escriban sus dudas en el pizarrón y, con ayuda del docente, resuelvan cada una.

Sistema Inglés de Medidas

Actividad 6

1. **Lean y reflexionen para resolver lo que se pide. Hagan sus operaciones en el espacio en blanco..**

   a) Azucena viajó por primera vez en avión y escuchó decir al piloto que volarían a 25 000 pies de altura sobre el nivel del mar. Nunca había escuchado sobre esta unidad de medida, así que al llegar a su destino investigó en internet y se enteró que esa unidad de medida no forma parte del Sistema Internacional sino del Sistema Inglés, el cual nunca había oído mencionar.
   b) Azucena quería saber a qué altura voló, siguió investigando y encontró que 1 pie es igual a 30.48 centímetros, ¿a cuántos metros voló su avión?

2. **Compartan sus respuestas con otro equipo.**

   a) Comenten el procedimiento que utilizaron para obtener su respuesta.
   b) Planteen un problema similar al otro equipo para que lo resuelva con un procedimiento diferente.
   c) Verifiquen nuevamente sus resultados y resuelvan las dudas que surjan.

Actividad 7

1. **Analiza el siguiente párrafo y contesta lo que se te pide.**

   Juana debe comprar 1.5 galones de anticongelante para hacer el servicio regular de su automóvil. Al acudir a la refaccionaria le indican que sólo se tienen botes con 60 onzas líquidas de contenido.

   Como Juana no conoce sobre este otro tipo de medida de líquido, le pregunta al encargado de la refaccionaria y este le señala que un galón es lo mismo que 128 onzas líquidas.

   a) ¿Le bastará con un bote?
   b) ¿Qué operaciones aritméticas necesita realizar con los datos que tiene para saber si le basta comprar un solo bote de 60 onzas?

2. **Realicen una comparación de las respuestas dadas de forma individual.**

   a) Lleguen a una conclusión sobre las operaciones aritméticas que deben realizarse.
   b) Investiguen en qué países se emplean de forma más usual las unidades de galones y onzas.

3. **Discutan en qué situaciones han escuchado o visto que se empleen unidades como pulgadas, pies, yardas, millas, onzas, libras y galones.**

   a) Revisen con su maestro si son verídicos sus casos que presentaron.

Glosario

Anticongelante. Sustancia o líquido que impide que se congele el sistema de enfriamiento de un motor.

InfórMate

El Sistema Internacional (SI) generalmente se emplea en todos los países para realizar mediciones; sin embargo, en algunos de habla inglesa se usan otras medidas las cuales conforman el Sistema Inglés de Medidas.

En la siguiente tabla se presentan las unidades de medida y las equivalencias de este sistema.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Longitud	Milla	mi	1 mi = 1 760 yd 1 mi = 5 280 ft
	Yarda	yd	1 yd = 36 in 1 yd = 3 ft
	Pie	ft	1 ft = 12 in 1 ft = 0.333 yd
	Pulgada	in	1 in = 0.8333 ft
Masa	Libra	lb	1/b = 16 oz
	Onza	oz	1 oz = 0.0625 lb
Capacidad	Galón estadounidense	gl	1 gl = 128 ft oz
	Onzas líquidas estadounidenses	fl oz	1 ft oz = 0.0078125 gl

PARA TIC

Conoce más acerca de las equivalencias entre sistemas de unidades en la liga:

https://bit.ly/2KqVmra

(Consulta: 30 de abril de 2018).

Para realizar conversiones entre unidades en este sistema se utiliza el mismo proceso que se planteó para el SI. Para convertir 15.5 yardas a pulgadas se usa la equivalencia que las relaciona, es decir, 1 yd = 36 in. Se crea la fracción a multiplicar dejando en el numerador la unidad a conservar y en el denominador la que desaparecerá: ($\frac{36 \text{ in}}{1 \text{ yd}}$). Por tanto, la multiplicación es:

$$15.5 \text{ yd} = \frac{36 \text{ in}}{1 \text{ yd}} = \frac{(15.5)(36 \text{ in})}{1} = 558 \text{ in}$$

Actividad 8

1. **Respondan las siguientes cuestiones en su cuaderno.**
   a) Un paquete de galletas indica que tiene un contenido de 12.6 onzas, pero el nutriólogo le recomendó a Lorena solo consumir 0.5 libras de ese tipo de galletas. Si Lorena se come la mitad del contenido del paquete, ¿estaría respetando las recomendaciones del nutriólogo? Argumenta.
   b) El papá de Rebeca compró una canasta de basquetbol que tiene ya su base. Si el instructivo indica que el aro de la canasta está a 120 pulgadas de altura, ¿cuál es la altura del aro si la necesita en pies?
   c) Roberto conduce su motocicleta y observa que para llegar al poblado próximo tiene que recorrer 45.6 millas, ¿cuánto equivale esta distancia en yardas?
   d) ¿A cuántos pies equivalen las 30 pulgadas que mide un bebé de 9 meses al ser medido por su pediatra?
   e) Un jugador de fútbol americano recorre 26 yardas, ¿cuántos pies recorrió este jugador?
2. **Compartan sus respuestas.**
   a) Comenten qué dificultades tuvieron a lo largo de la actividad.
   b) Determinen cuál fue el problema más complejo y resuélvanlo en clase. En caso de que algún compañero tenga dudas o dificultades, apóyenlo con la guía de su docente.

Equivalencias entre sistemas

Actividad 9

1. **Reflexionen en el siguiente texto y respondan las cuestiones que surgen de él.**

   Ana va a comprar un teléfono celular y está indecisa entre dos modelos de precio similar. La diagonal de la pantalla del modelo A mide 5.1 pulgadas y la del modelo B mide 12 cm.

   Como Ana no conoce la equivalencia entre centímetros y pulgadas su hermana le indica que 1 pulgada es igual a 2.54 cm.

   a) Con esto en mente, ¿cuál es la medida, en centímetros, de la diagonal de la pantalla de cada celular?
2. **Realicen una lluvia de ideas para descubrir el proceso que se debe realizar para ejecutar bien el cálculo.**
   a) Discutan sobre la importancia de conocer cómo pasar las medidas del sistema inglés a internacional y viceversa.

InfórMate

Las equivalencias de la siguiente tabla se emplean para convertir el valor de una unidad del Sistema Internacional al Sistema Inglés, o viceversa.

Magnitud	Equivalencias entre el Sistema Inglés y el SI
Longitud	1 mi = 1.609 km 1 in = 2.54 cm 1 ft = 30.48 cm 1 yd = 91.4 cm
Masa	1 oz = 28.349 g 1 lb = 16 oz
Capacidad	1 gl = 3.785 L 1 fl oz = 29.5735 ml

Para convertir entre las unidades de los dos sistemas se procede de forma similar a las que se han analizado.

Para convertir 5.6 kilómetros a millas, usamos la equivalencia respectiva (1 mi = 1.609 km) y se realiza la multiplicación con la fracción ($\frac{1 \text{ mi}}{1.609 \text{ km}}$), es decir:

$$5.6 \text{ km} = \frac{1 \text{ mi}}{1.609 \text{ km}} = \frac{5.6 \text{ mi}}{1.609} = 3.48 \text{ mi}$$

En caso de que no exista una relación de equivalencia directa se tendrá que aplicar esta regla dos veces. Por ejemplo, para convertir 560 onzas a kilogramos no encontramos ninguna regla que relacione estas unidades. Por tanto, primero convertimos las onzas a gramos y después los gramos a kilogramos. Las equivalencias respectivas expresadas como fracciones serían:

Así, al multiplicar obtenemos: $\frac{28.3 \text{ g}}{1 \text{ oz}}$ y $\frac{1 \text{ kg}}{1\,000 \text{ g}}$

$$560 \text{ oz} = \frac{28.3 \text{ g}}{1 \text{ oz}} = \frac{1 \text{ kg}}{1\,000 \text{ g}} = 15.848 \text{ kg}$$

Por tanto, 560 oz equivalen a 15.848 kg.

Actividad 10

1. **Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.**

   a) Un campo de futbol americano mide 120 yardas de largo y uno de futbol soccer tiene 100.5 metros, ¿cuál es más largo?, ¿por qué?

   b) Mario posee una masa corporal de 57 kg mientras que su amigo que vive en Florida tiene 121 libras, ¿quién conserva más masa y por qué?

   c) La etiqueta del jugo de Federico indica que tiene 8 onzas líquidas. ¿A cuántos mililitros equivale?

   d) ¿Cuál es el equivalente en pulgadas de una regla de 30 cm?

   e) El papá de Verónica compró 7 cubetas de pintura de 19 litros cada una, ¿cuántos galones de pintura tiene en total?

2. **Compartan sus respuestas con la guía del docente.**

   a) Comenten cuál de los problemas se les dificultó y por qué.

   b) Elijan una respuesta que consideren correcta y verifiquen si el procedimiento que siguieron para obtenerla está libre de errores. En caso de no ser así, corrijan.

Pausa en el camino

Actividad 11

1. **Utilicen los espacios para las operaciones pertinentes y dar respuestas a cada uno de los siguientes problemas.**

   a) Juan desea comprar un nuevo televisor. El encargado de la tienda donde acude a comprarlo le afirma que el televisor que le interesa tiene 34 pulgadas de altura según el manual. Si el mueble de la casa de Juan tiene una altura de 90 cm, ¿cabrá este televisor en el mueble?

   b) La receta de pastel que Ramón está siguiendo por internet le indica que debe usar 4.5 onzas de harina de trigo, ¿a cuántos gramos corresponde esta medida?

   c) Juan va por una carretera en Estados Unidos. Él ve que un letrero indica que faltan 8.5 millas para llegar a una ciudad A. Luego de cierto tiempo, observa otro letrero que indica que faltan 1000 yardas para llegar a esa ciudad A. ¿Cuántas millas hay entre un letrero y otro?

   d) Rogelio acude al supermercado para comprar jugos. Observa dos marcas del mismo sabor, la marca "Jugoso" tiene en la etiqueta que la botella trae $\frac{1}{2}$ galón; mientras que la marca "Sabroso" señala que su producto trae 2 litros. ¿Cuál marca tiene más contenido de jugo?

   e) Miriam desea conocer cuántos milímetros de un clavo de 2 pulgadas sobresaldrán al clavarlo en su totalidad en una tabla que tiene 3 cm de grosor.

2. **Intercambien sus respuestas con las de otra pareja.**

   a) Analicen sus procedimientos y comenten si encuentran errores o diferencias.
   b) Redacten, en su cuaderno, un problema que ponga a prueba sus conocimientos sobre las magnitudes y medidas.
   c) Escríbanlo en una cartulina y péguenlo en un lugar visible para que otros compañeros puedan resolverlo, o bien, comentarles si consideran que está bien planteado o no y por qué.

Pasos firmes

Terminaste un trimestre y es tiempo de dar pasos firmes para continuar con tu camino.

1. Contesta las preguntas del siguiente esquema.

¿Cuáles fueron mis aprendizajes?

¿Qué dificultades enfrenté para lograr mis aprendizajes?

¿Qué puedo hacer para solucionar las dificultades que enfrenté?

¿Cómo puedo utilizar mis aprendizajes en mi vida cotidiana?

Resolviendo la incógnita: ecuaciones

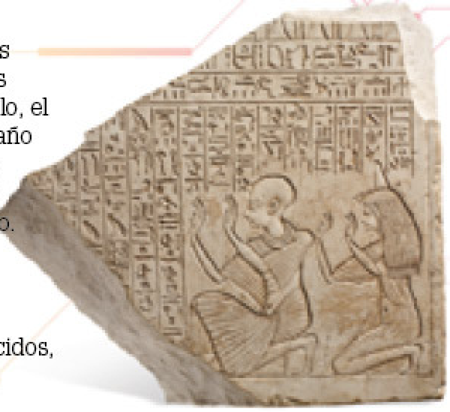
Como bien sabes, una ecuación es una igualdad matemática que puede tener una o más incógnitas. ¿Te has preguntado desde cuándo la humanidad ha resuelto problemas cotidianos mediante el planteamiento de ecuaciones?

La antigua civilización babilónica solucionaba problemas relacionados con el comercio, propiedades, herencias, terrenos, etcétera; y en diversas tareas usaban el lenguaje algebraico, lo cual lleva a lo que actualmente se conoce como ecuaciones lineales. **¿Te imaginas cómo resolvían estas ecuaciones sin el uso de la calculadora?**

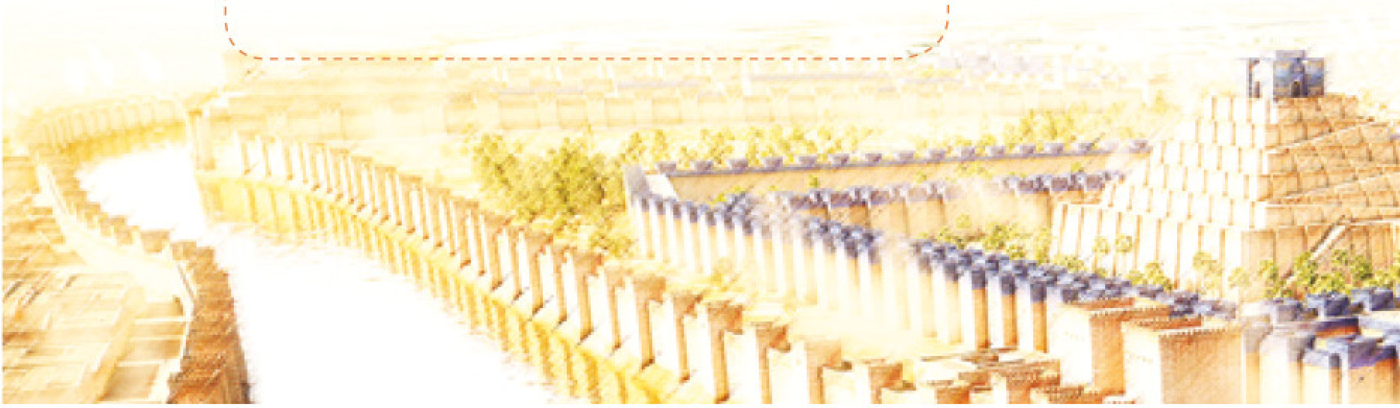
Los aportes matemáticos de los egipcios también apuntan a las ecuaciones lineales. Por ejemplo, el Papiro de Rhind, que data del año 1650 a.n.e., expone problemas algebraicos en los que se debe encontrar un valor desconocido. Plantea ecuaciones del tipo

$$x + ax = b$$

donde a,b son números conocidos, **¿qué representa la x?**



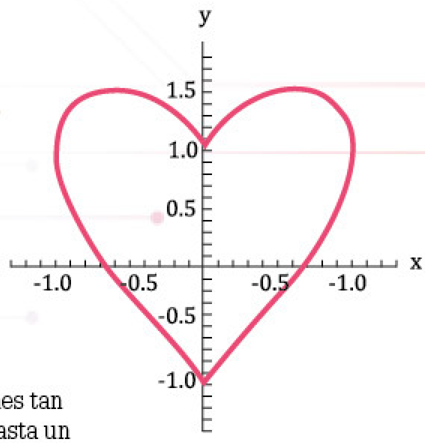
En la antigua Grecia, existió el matemático Diofanto de Alejandría (200 – 214 d.n.e.,), considerado el padre del álgebra y quien dejo un interesante acertijo algebraico en su tumba para saber su edad. **¿Crees que eres capaz de resolver la ecuación para descubrir la edad de Diofanto? ¡Atrévete a descifrar el acertijo!**



Un aspecto trascendental de las ecuaciones, son las incógnitas. El francés François Viète fue el primero en emplear letras para simbolizar las incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas, pero esto ocurrió hasta el siglo XVI. Y tú, **¿qué hubieras utilizado para representar una incógnita?**

Actualmente las ecuaciones sirven para resolver básicamente todo tipo de problemas en cualquier situación cotidiana, por ejemplo, se usan para resolver problemas en actividades de reforestación, calcular la cantidad de dinero que podrás ahorrar durante un periodo determinado, entre otros.

¿Te gustarían las ecuaciones si pudieras utilizarlas en el amor? Actualmente existen cinco ecuaciones que según los expertos, te ayudarán a saberlo considerando variables como atracción de pareja, miedo, deseo, entre otros.



También existen ecuaciones tan complejas que se ofrece hasta un millón de dólares por resolverlas, **¿sabes a cuánto equivale en pesos está cantidad?**

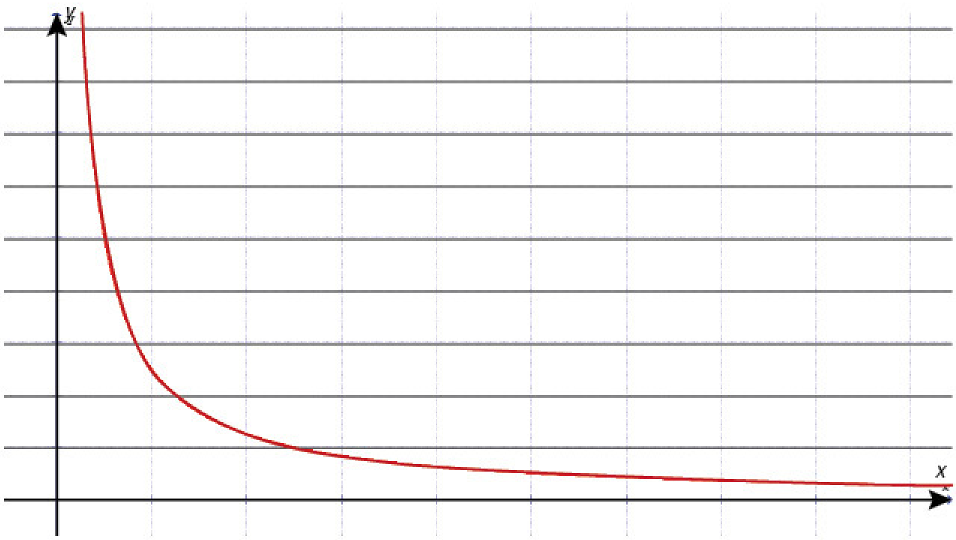
Puedes resolverlo con una ecuación, y si estudias a fondo las ecuaciones, quizá tú puedas ser uno de los afortunados ganadores.

Lee con atención y subraya la respuesta correcta y así valores tu trayecto.

1. ¿Cuál de las siguientes funciones representa una función de proporcionalidad directa?

   a) $y = 3x + 4$
   b) $y = 3x - 4$
   c) $y = -3x - 4$
   d) $y = 3x$

2. ¿Cuál de las siguientes situaciones se puede representar con la siguiente gráfica?



   a) Relación entre el perímetro (y) de un cuadrado con su lado (x).
   b) Relación entre el precio a pagar (y) y la cantidad de productos adquiridos (x).
   c) Relación entre la talla de una camisa (y) y su precio (x).
   d) Relación entre la presión (y) y el volumen (y) de un gas.

3. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una expresión equivalente a $3(4 - 5\,x) + x$?

   a) $-12 - 15x + x$
   b) $12 + 14x$
   c) $2(6 - 7x)$
   d) $12 - 14x$

4. La reducción de los términos semejantes en la expresión $6x + 6y - 3z + 4z - 8y - 10x$ da como resultado:

   a) $-16x - 32y - 12z$
   b) $16x + 32y + 12z$
   c) $-4x - 2y + z$
   d) $4x + 2y - z$

5. Reduce la expresión $4q - 5p + 6 - 2q - 5p - 6$.

a) $2q - 10p$
b) $2q - 10p - 12$
c) $-2q - 10p - 12$
d) $-2q + 10p$

6. Multiplica la expresión $-5(2y - 1)$.

a) $10y + 5$
b) $-3y - 6$
c) $-10y + 5$
d) $3y - 6$

7. Determina el valor de la suma de los ángulos internos de un polígono de 17 lados.

a) 2520°
b) 2700°
c) 2340°
d) 2880°

8. Calcula el total de diagonales que pueden trazarse en un polígono de 15 lados.

a) 104
b) 65
c) 77
d) 90

9. Un vaso de un néctar de jugo de naranja indica que contiene 185 ml, ¿a cuántos litros equivale?

a) 18.5 L
b) 1.85 L
c) 0.185 L
d) 0.0185 L

10. Una bolsa de café tiene 750 g y se desea vender en Estados Unidos, por lo que su peso debe expresarse en libras, ¿cuál es el peso de la bolsa en libras?

a) 1.6534 lb
b) 1.3 lb
c) 0.674 lb
d) 1.75 lb

Trimestre III

Ejes

- Forma, espacio y medida
- Análisis de datos

Temas

- Magnitudes y medidas
- Estadística
- Probabilidad

LECCIÓN 11

¿Cuánta pintura necesitamos?

Tema Magnitudes y medidas

Aprendizaje esperado

- Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

LECCIÓN 12

Quiero el vaso que tenga más agua

Tema Magnitudes y medidas

Aprendizaje esperado

- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

LECCIÓN 13

¿Qué nos dice la gráfica?

Tema Estadística

Aprendizaje esperado

- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea.

El ser humano, sin darse cuenta, tuvo su primer acercamiento a las matemáticas gracias a las figuras geométricas de su entorno. Actualmente las diversas obras de ingeniería se basan en las figuras geométricas elementales y en los avances matemáticos. En este último trimestre revisarás aspectos relacionados con los perímetros y las áreas de polígonos regulares; problemas sobre el cálculo de volúmenes de prismas y cilindros; la lectura y análisis de tablas de datos, así como la construcción de las mismas y el cálculo de probabilidades sencillas para que realices algunos juegos de azar.

LECCIÓN 14

Promedio, lo de en medio y lo más popular

Tema Estadística

Aprendizaje esperado

- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellos conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

LECCIÓN 15

Le apuesto a ganar

Tema Probabilidad

Aprendizaje esperado

- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Magnitudes y medidas

¿Cuánta pintura necesitamos?

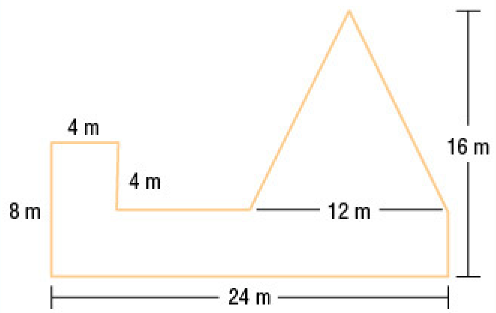
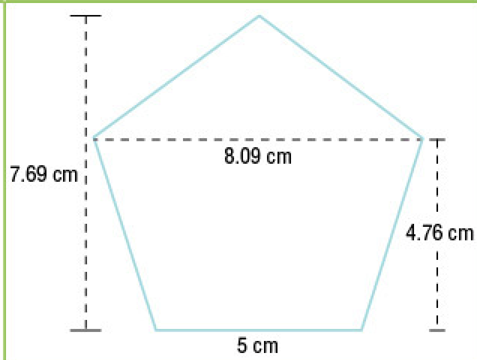
Aprendizaje esperado: Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean y determinen lo que se indica.**

   ¿Cuántos litros de pintura en esmalte se requieren para pintar cada una de las siguientes figuras, si un litro de pintura rinde para pintar 12 m^2?

Figura A	Figura B
	
Área = ____________ m^2 Pintura en esmalte = ____________ L	Pintura en esmalte = ____________ L

2. **Redacten los pasos que siguieron para obtener la cantidad de litros necesarios para pintar las figuras anteriores.**

   ____
   ____
   ____

3. **Intercambien sus resultados con los de otros equipos y compartan sus procedimientos.**

   a) Consideren la posibilidad de que dos equipos hayan seguido caminos distintos y correctos.

Ruta del saber

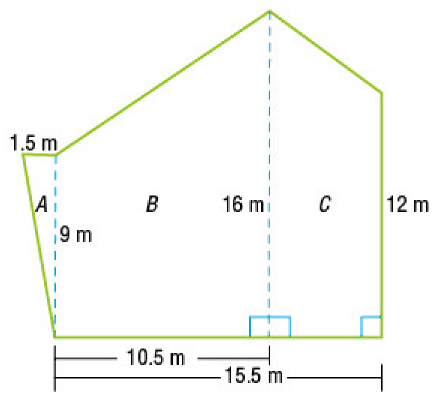
Perímetro y área de polígonos regulares

Actividad 2

1. **Calculen el área de la siguiente figura geométrica. Tomen en cuenta que:**

   a) La figura representa las dimensiones de un terreno visto desde arriba.

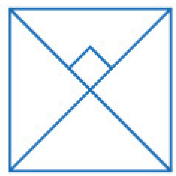
   b) Cada cuadrito ubicado en la intersección de dos segmentos indica que éstos son perpendiculares.



Glosario

Perpendiculares. Dos segmentos o rectas son perpendiculares si el ángulo comprendido entre ellos es recto.

Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.



2. **Escriban el nombre de cada una de las tres figuras geométricas (*A*, *B* y *C*) en las que está dividido el terreno anterior.** ______________________

____

3. **Anoten en la siguiente tabla la fórmula del área de cada una de las figuras que constituyen el terreno anterior y calculen el área respectiva.**

Figura *A*	Figura *B*	Figura *C*
Área $A =$	Área $B =$	Área $C =$

4. **Completen la oración.**

   La suma de las áreas de las figuras *A*, *B* y *C* es igual al área total del terreno, es decir: ______________ = ______________ m^2.

5. **Analicen y hagan los trazos necesarios sobre la figura del terreno para así responder lo solicitado a continuación.**

   a) ¿Cómo obtendrían el área de las figuras *B* y *C* utilizando sólo las fórmulas de área para triángulos y para rectángulos?

   b) ¿Cómo obtendrían el área de las figuras *B* y *C* empleando únicamente la fórmula del área de los triángulos?

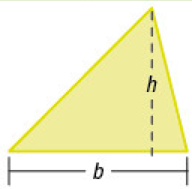
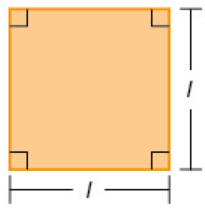
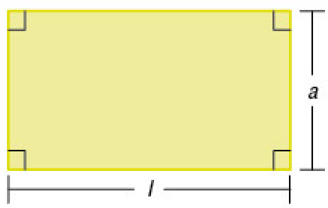
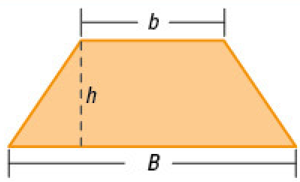
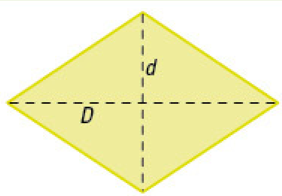
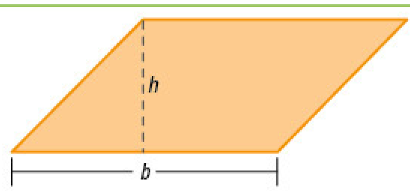
6. **Comparen sus resultados y expongan el procedimiento que siguieron para calcular las áreas de las figuras.**

   a) ¿Todos lograron las mismas respuestas? ¿Hubo procedimientos distintos entre los equipos?
   b) Corrijan sus resultados, en caso de ser necesario.
   c) Revisen las respuestas del punto 2, con ayuda de su docente.

7. **Compartan sus análisis y describan los métodos indicados.**

InfórMate

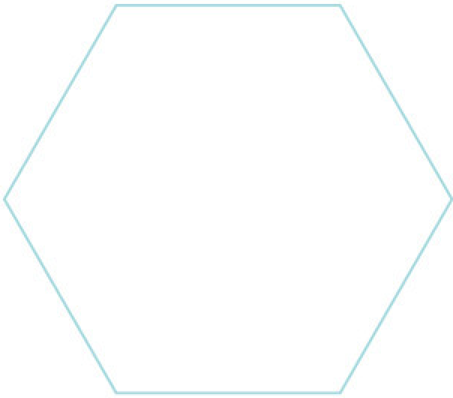
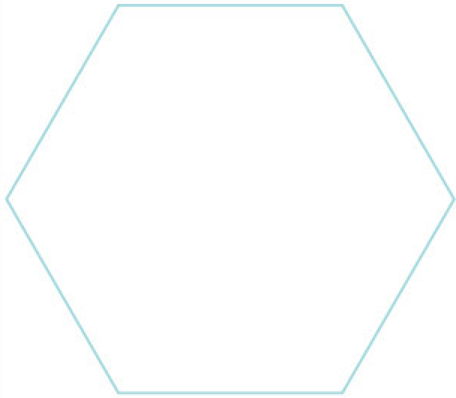
Recordatorio de fórmulas de áreas de triángulos y cuadriláteros.

Nombre	Figura	Fórmula del área
Triángulo		$A = \frac{b \times h}{2}$
Cuadrado		$A = l^2$
Rectángulo		$A = l \times a$
Trapecio		$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$
Rombo		$A = \frac{D \times d}{2}$
Romboide		$A = b \times h$

Actividad 3

1. Lleven a cabo lo que se pide.

a) Tracen líneas rectas para dividir los hexágonos regulares en figuras de las que conozcan su fórmula para calcular su área. Las divisiones de un hexágono deben ser distintas a las del otro.

División 1	División 2
	

b) ¿Qué figuras geométricas se formaron en cada una de las dos divisiones que realizaron?

- División 1: ____________________
- División 2: ____________________

c) Midan, con una regla, las longitudes de los segmentos involucrados en el cálculo del área de cada figura (usen centímetros con un decimal, por ejemplo, 3.5 cm) y calculen, en su cuaderno, cada una de las áreas.

d) Anoten, a continuación, los resultados que obtuvieron en el inciso c).

- Áreas de las figuras en la división 1: ____________________
- Áreas de las figuras en la división 2: ____________________

e) Calculen el área total del polígono en cada una de las dos divisiones.

- Área del polígono de acuerdo con la división 1: ____________________
- Área del polígono de acuerdo con la división 2: ____________________

2. Compartan los resultados anteriores para verificar las divisiones que realizaron en cada hexágono, así como las operaciones hechas para hallar el área de cada uno.

Relaciona

Debido a que calcularemos el área de otras figuras geométricas, es oportuno que repases el empleo de las fórmulas para determinar el área de figuras geométricas conocidas que aprendiste en grados anteriores de *Matemáticas*.

Actividad 4

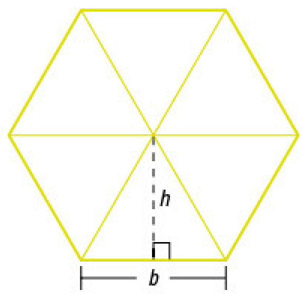
1. Lean la siguiente información y respondan.

El mismo hexágono de la actividad anterior se dividió como se observa en la siguiente figura. Desde el centro del polígono se trazaron líneas hacia cada uno de los vértices, resultando seis triángulos. El segmento punteado coincide con la altura de los triángulos. Este segmento se denomina apotema del polígono.

Glosario

Apotema: segmento trazado desde el centro de un polígono regular hacia el punto medio de uno de sus lados.

Un polígono regular tiene tantas apotemas como lados. Estas apotemas son iguales entre sí.



a) ¿Los 6 triángulos que se formaron son iguales entre sí? Justifiquen su respuesta.

____

____

b) Midan la base y la altura de uno de los triángulos (usen centímetros con un decimal, por ejemplo, 3.5 cm) y escriban, a continuación, los datos obtenidos.

- Base b = ________ cm
- Altura h = ________ cm
- Área de un triángulo = ________ cm^2
- Área total del hexágono = ________ cm^2

2. Lean detenidamente cada frase y escríbanla como fórmula.

- El área de cada triángulo (A_T) del hexágono se obtiene multiplicando su base (b) por su altura (h) y dividiendo el producto entre 2.

A_T = ______________

- El área del hexágono es seis veces el área de un triángulo.

A = ______________

- El perímetro del hexágono regular se obtiene multiplicando por 6 la medida de un lado.

P = ______________

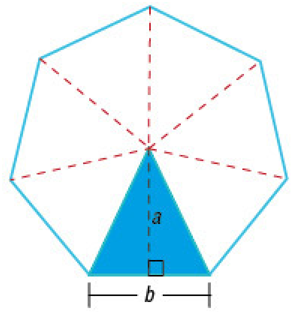
- El área del hexágono se puede hallar multiplicando su perímetro por la altura de cada triángulo y dividiendo el producto entre 2.

A = ______________

- El área de un hexágono regular se calcula multiplicando su perímetro por su apotema (a) y dividiendo el producto entre 2.

$A =$ ______

3. Respondan las preguntas relacionadas con el siguiente heptágono regular.



a) ¿En cuántos triángulos iguales al triángulo azul se puede dividir el polígono?

______

b) Si se denota como a la altura del triángulo y como b la base del mismo, ¿cómo se representa el área del triángulo?

4. Completen la expresión que determina el perímetro P del heptágono si cada lado mide b.

$P =$ ______

5. Escriban en las líneas la justificación para cada uno de los pasos en la siguiente igualdad.

$$A = 7 \times \frac{b \times a}{2}$$ ______

$$= \frac{7 \times b \times a}{2}$$ ______

$$= \frac{(7 \times b) \times a}{2}$$ ______

$$= \frac{P \times a}{2}$$ ______

De interés

El cálculo del área del triángulo es primordial puesto que cualquier polígono puede ser dividido en triángulos tras lo cual podremos hallar el área de cada uno de estos y así determinar el área total del polígono.

6. Compartan sus respuestas y expongan los razonamientos que los llevaron a dichos resultados.

a) Generalicen los pasos realizados con el hexágono y heptágono regulares y propongan una expresión para hallar el área A de un polígono regular de n lados, cuyos lados miden b, su apotema es a y el perímetro se representa por P.

b) Pidan asesoría a su docente para verificar que la fórmula general obtenida es correcta.

InfórMate

Dos fórmulas opcionales para encontrar el área de un triángulo

Caso 1. Si se conoce la medida de los 3 lados del triángulo, representados por *a*, *b* y *c*, entonces su área es:

$$A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

donde $S=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Caso 2. Si se tiene un triángulo equilátero cuyos lados miden *a*, entonces el área es:

$$A=\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$$

Fórmula para calcular el área de un polígono regular

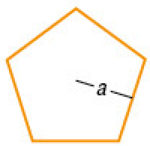
Si se tiene un polígono regular de perímetro *P* y cuya apotema es *a*, entonces el valor de su área se puede calcular por medio de la fórmula:

$$A=\frac{P\times a}{2}$$

Ejemplo:

Calcular el área de un pentágono regular cuyos lados miden 5 cm y su apotema mide 3.4 cm.

Se tiene el valor de sus lados, por lo que el perímetro es $P = 5 \times 5 = 25$ cm, entonces el área es:



$$A=\frac{P\times a}{2}=\frac{25\times 3.4}{2}=42.5\text{ cm}^2$$

En ocasiones se necesita obtener la medida de algún elemento de una figura conocida, de la cual se conocen su área o perímetro. En este caso, podemos sustituir los valores conocidos en las fórmulas respectivas y proceder como si estuviéramos resolviendo una ecuación de una incógnita. La incógnita representa al dato que se quiere conocer.

Ejemplo:

Encuentra el polígono regular que tiene lados de 3 cm, una apotema de 4.85 cm y un área de 72.75 cm².

Se identifican los datos con los que se cuenta:

Lado	Perímetro	Apotema	Área
3 cm	$n \cdot 3 = 9$ cm	72.75 cm	72.75 cm²

Nota que *n* es el valor que se busca.

Sustituimos en la fórmula $A = \frac{P \times a}{2} = \frac{n \times l \times a}{2}$ los datos:

$$72.75 = \frac{n \times 3 \times 4.85}{2}$$

Despejamos la variable n:

$$\frac{72.75 \times 2}{3 \times 4.85} = n$$

$$10 = n$$

Así se concluye que se trata de un decágono regular.

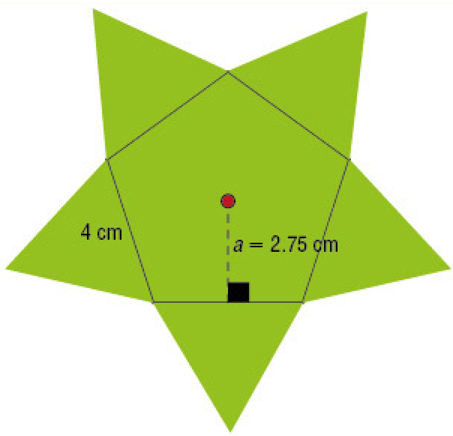
Actividad 5

1. Calculen las áreas sombreadas de cada una de las figuras presentadas a continuación.

a) Anoten sus procedimientos y resultados en los espacios señalados.

b) Tomen en cuenta la fórmula para hallar el área de un triángulo si se conocen las medidas de sus tres lados.

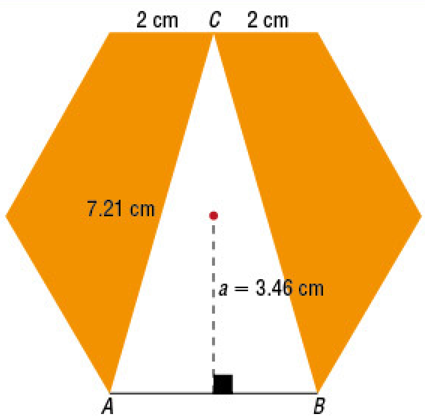
- El siguiente pentágono regular tiene 4 cm de lado, su apotema mide 2.75 cm y sus triángulos son equiláteros.



Operaciones

$A =$ ______________________

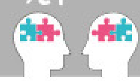
- El siguiente hexágono regular tiene una apotema de 3.46 cm y su triángulo ABC es isósceles.



Operaciones

$A =$ ______________________

Y tú, ¿qué harías?



Un famoso cantante y compositor inglés escribió lo siguiente:

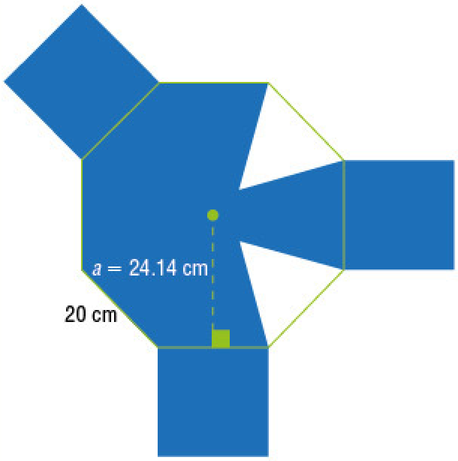
"El ser honesto no te traerá muchos amigos, pero te traerá los correctos"

-John Lennon

¿Qué opinas sobre la honestidad al entregar un trabajo o resolver un ejercicio o más aún, al resolver un examen?

¿Realmente es necesaria la honestidad?

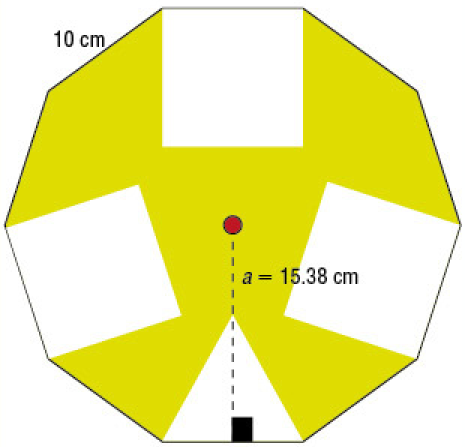
- El polígono siguiente está compuesto por 3 cuadrados y un octágono regular que comparten lados como se muestra en la figura. Los lados del octágono miden 20 cm y su apotema mide 24.14 cm. Los triángulos blancos son equiláteros.



Operaciones

A = ____________________

- La figura está formada por un decágono regular cuyos lados miden 10 cm, su apotema mide 15.38 cm y los espacios blancos son tres cuadrados y un triángulo equilátero.



Operaciones

A = ____________________

2. **Preparen una exposición detallada acerca del procedimiento efectuado para encontrar el área sombreada de las figuras anteriores.**

3. **Seleccionen, con ayuda de su docente, los equipos que expondrán así como la asignación de ejercicios.**

   a) Participen, con respeto, en las exposiciones de sus compañeros. Complementen la información presentada con lo que consideren importante mencionar.

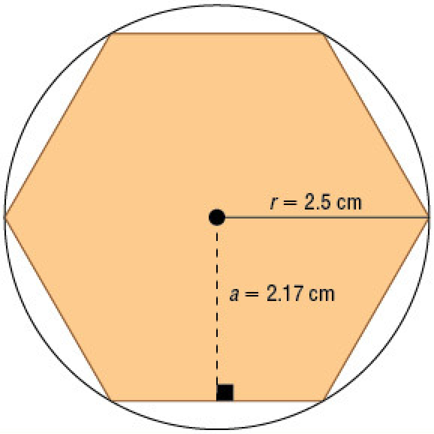
   b) Comparen sus respuestas y procedimientos con lo expuesto. Corrijan si es necesario.

Perímetro de la circunferencia y área del círculo

Actividad 6

1. **Calculen el área de los polígonos inscritos en una circunferencia, presentados en las figuras.**

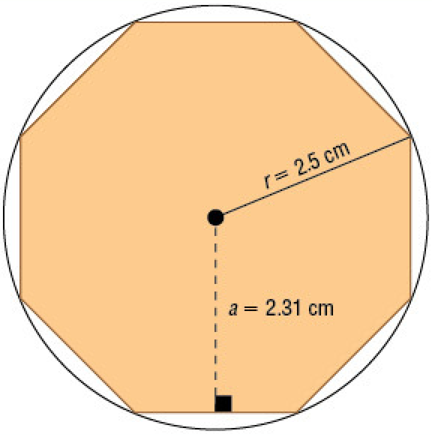
   a) El siguiente hexágono regular tiene 2.5 cm de lado y una apotema de 2.17 cm.



Perímetro del hexágono: ____________

Área del hexágono: ____________

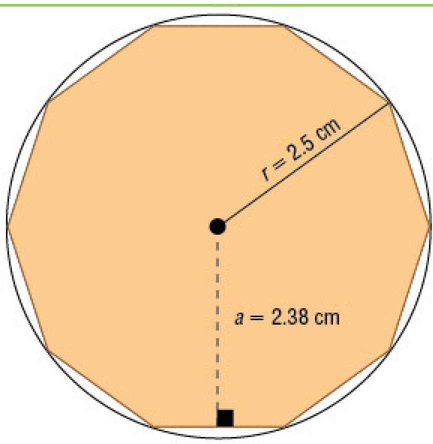
   b) Cada lado del octágono mide 1.91 cm y su apotema es de 2.31 cm.



Perímetro del octágono: ____________

Área del octágono: ____________

   c) Cada lado del decágono mide 1.55 cm y su apotema es de 2.38 cm.



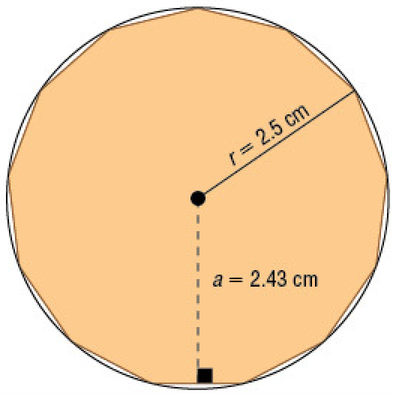
Perímetro del decágono: ____________

Área del decágono: ____________

Glosario

Circunferencia. Figura geométrica formada por todos los puntos que están a la misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro.

d) El siguiente polígono tiene 13 lados y se llama tridecágono. Cada uno de sus lados mide 1.2 cm y su apotema es de 2.43 cm.



Perímetro del tridecágono: ____________

Área del tridecágono: ____________

2. Observen los polígonos *a, b, c* y *d* anteriores inscritos en la circunferencia y respondan:

a) ¿A la medida de qué elemento de la circunferencia se va aproximando la medida de la apotema de los polígonos conforme va aumentando la cantidad de sus lados? ____________

b) ¿A qué medida de la circunferencia se van aproximando los perímetros de los polígonos conforme van aumentando la cantidad de sus lados? ____________

c) ¿A qué medida del círculo se van aproximando las área de los polígonos conforme van aumentando la cantidad de sus lados? ____________

3. Comenten sus respuestas y argumenten cómo las obtuvieron.

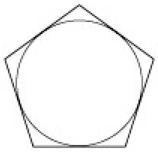
4. Analicen la forma en que se aproximaron al perímetro y al área del círculo. ¿Qué sucedería si en vez de usar polígonos inscritos hubiesen utilizado polígonos circunscritos a la circunferencia? ____________

Glosario

Círculo. Figura geométrica delimitada por una circunferencia.

Polígono circunscrito. Polígono regular que cumple que cada lado de él es tocado por la circunferencia en su punto medio.

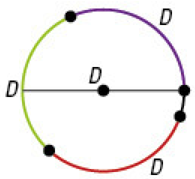
Por ejemplo, se muestra un pentágono circunscrito



InfórMate

El número π

El número π se define como la cantidad de veces que cabe el diámetro en la circunferencia, es decir, que para cualquier circunferencia, sin importar el diámetro, el cociente entre su longitud y el diámetro es una constante que se llama π.



$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi$$

El número π tiene una cantidad infinita de decimales no periódicos, es decir, que no tienen un patrón o regla de comportamiento. Sus primeros ocho decimales son 3.14159265 y por su naturaleza se toma una aproximación de él, aquí lo interpretaremos como $\pi = 3.1416$.

El perímetro y el área del círculo

El perímetro del círculo se obtiene multiplicando π por el diámetro, es decir, con la fórmula $\pi \times D$.

Para hallar el área de un círculo, a partir de polígonos regulares inscritos, se hace un análisis como el siguiente:

El área de un polígono regular de n lados es:

$$\frac{P \times a}{2}$$

donde P es el perímetro.

Conforme la cantidad de lados del polígono va creciendo, su perímetro se va acercando a la circunferencia. Es decir:

$$\frac{P \times a}{2} \rightarrow \frac{\pi \times D \times a}{2} = \pi \times r \times a$$

El símbolo $\rightarrow$ indica que la expresión de la izquierda se va aproximando a la expresión de la derecha.

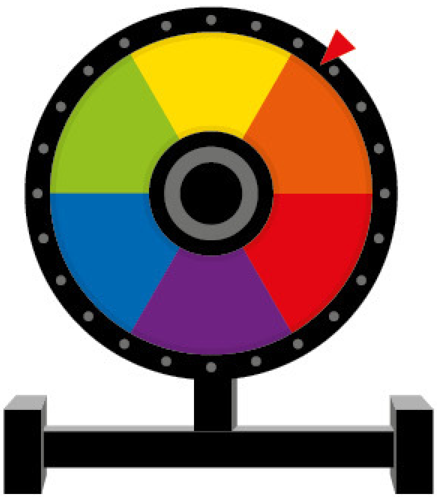
Además, cuando la cantidad de lados aumenta, la apotema se va acercando al radio de la circunferencia, así que:

$$\pi \times r \times a \rightarrow \pi \times r \times r = \pi r^2$$

Por tanto, la fórmula para hallar el área de un círculo es $A = \pi r^2$.

Ejemplo:

Para calcular el perímetro y el área de una ruleta de feria que tiene un radio igual a 0.6 m,



el procedimiento para conseguir el perímetro será:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3.1416 \cdot 0.6 = 3.769 \text{ m}$$

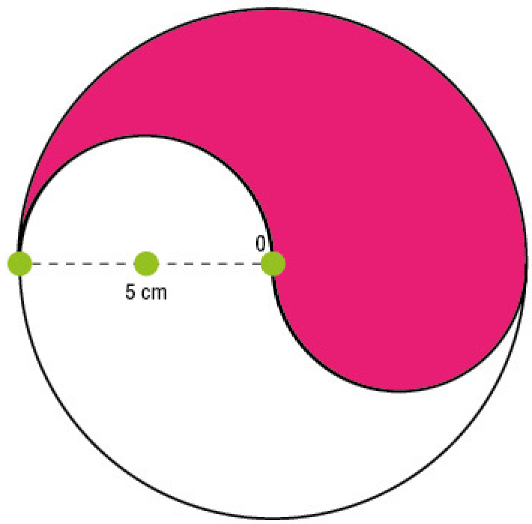
el procedimiento para obtener el área del círculo será:

$$A = \pi \cdot r^2 = 3.1416 \cdot (0.6)^2 = 1.1309 \text{ m}^2$$

Actividad 7

1. **Calculen el valor de las áreas y perímetros indicados en cada una de las siguientes figuras.**

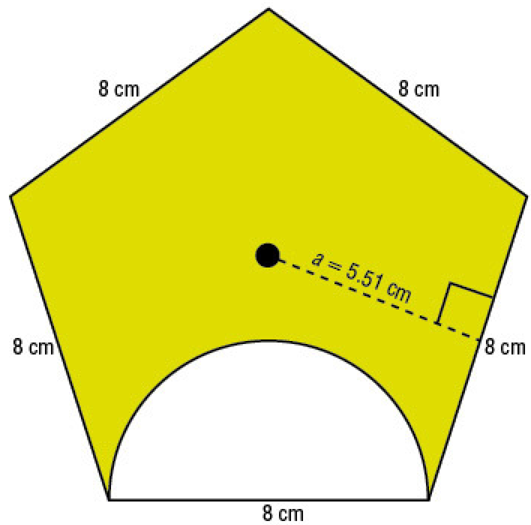
   a) Determinen el perímetro y área de la parte coloreada. Se observan también semicírculos de radio igual a 5 cm. El punto marcado con una *O* es el centro de la circunferencia mayor.



$P =$ ______________________

$A =$ ______________________

   b) Obtengan el perímetro y área de la parte coloreada si la apotema del pentágono regular mide 5.51 cm. Esta figura contempla un semicírculo.



$P =$ ______________________

$A =$ ______________________

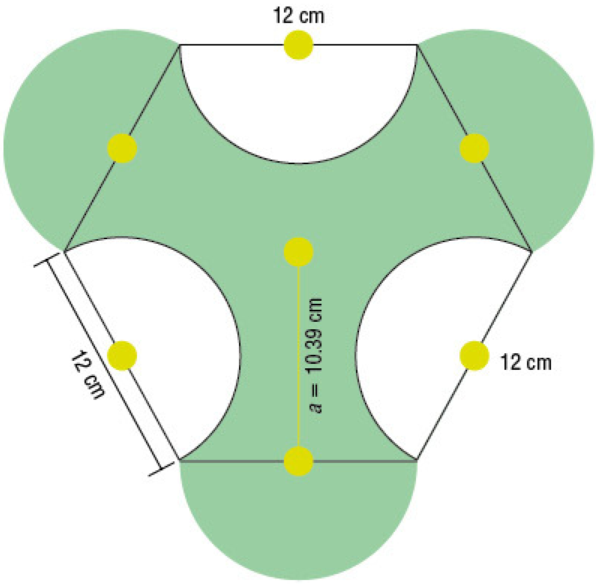
PARA TIC

En el siguiente enlace podrás emplear una calculadora para determinar el perímetro y área de cualquier polígono regular al proporcionar dos datos del polígono.

https://bit.ly/2wx0ffy

(Consulta: 13 de junio de 2018).

c) Calculen el perímetro y área de la parte coloreada si la apotema del hexágono regular es de 10.39 cm. Esta figura contempla semicírculos con el mismo radio.



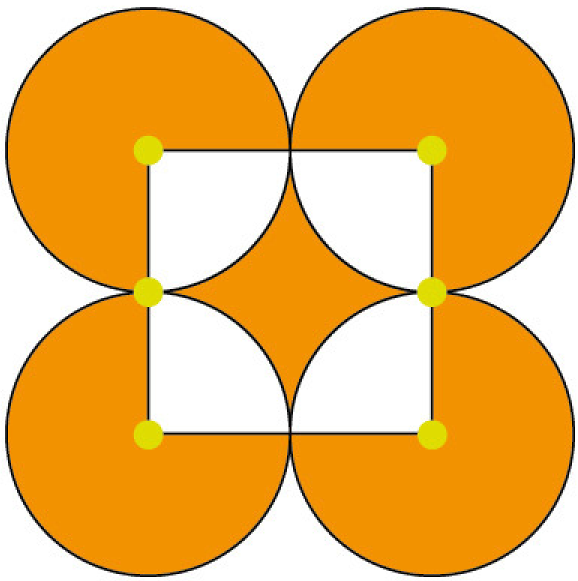
$P =$ ______________________

$A =$ ______________________

d) Determinen el valor del área coloreada si se sabe que el cuadrado tiene lados de 20 cm. Los vértices del cuadrado son los centros de las circunferencias y ellas son tangentes dos a dos.

Glosario

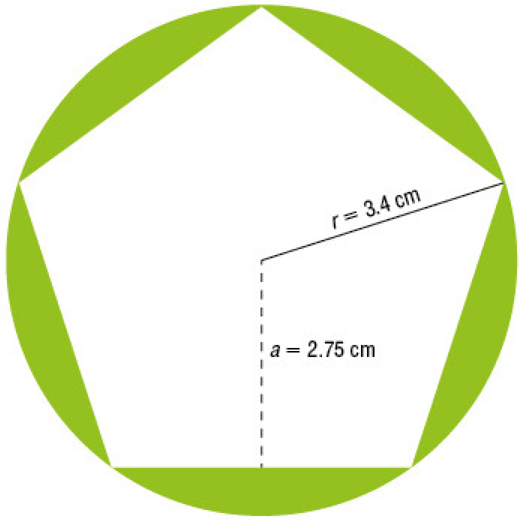
Circunferencias tangentes. Circunferencias que se tocan en un sólo punto.



$P =$ ______________________

$A =$ ______________________

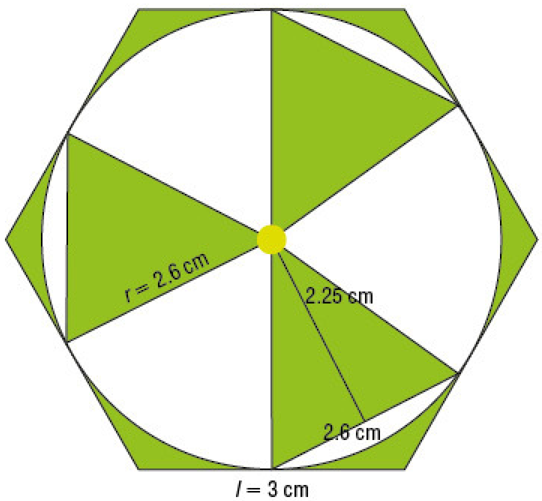
e) Determinen el área de la región sombreada si se sabe que el pentágono inscrito es regular, cada uno de sus lados mide 4 cm, su apotema mide 2.75 cm y el radio de la circunferencia mide 3.4 cm.



$P =$ ____________________

$A =$ ____________________

f) Hallen el perímetro del hexágono y el área de la región sombreada si se sabe que el radio de la circunferencia inscrita es de 2.6 cm, los triángulos verdes son equiláteros con altura de 2.25 cm y cada lado del hexágono mide 3 cm.



$P =$ ____________________

$A =$ ____________________

2. **Intercambien sus resultados con los de otros equipos y compartan sus procedimientos.**

a) Corrijan, en caso de ser necesario.

Pausa en el camino

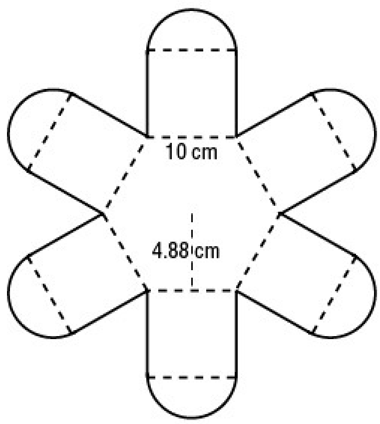
Actividad 8

1. Determinen los datos solicitados en cada uno de los polígonos regulares.

a) Se sabe que el área de un hexágono regular mide 25.11 cm^2. Si se tiene que cada lado del hexágono mide 3.1 cm, ¿cuál es el valor de la apotema?

b) ¿De qué polígono regular se trata si tiene un área de 90 cm^2, una apotema de 5 cm y cada lado mide 7.2 cm?

2. Calculen el perímetro y área de la figura siguiente considerando las medidas presentadas. Esta figura se compone de un hexágono regular, cuadrados del mismo lado y semicírculos del mismo radio.



Perímetro ______________________

Área total ______________________

3. Anoten, a continuación, las fórmulas que emplearon para calcular el perímetro y el área de la figura anterior.

4. Presenten sus perímetros y áreas.

a) Comparen sus resultados con los de las demás parejas, de forma que refuercen las fórmulas que se aplican.

Quiero el vaso que tenga más agua

Aprendizaje esperado: Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

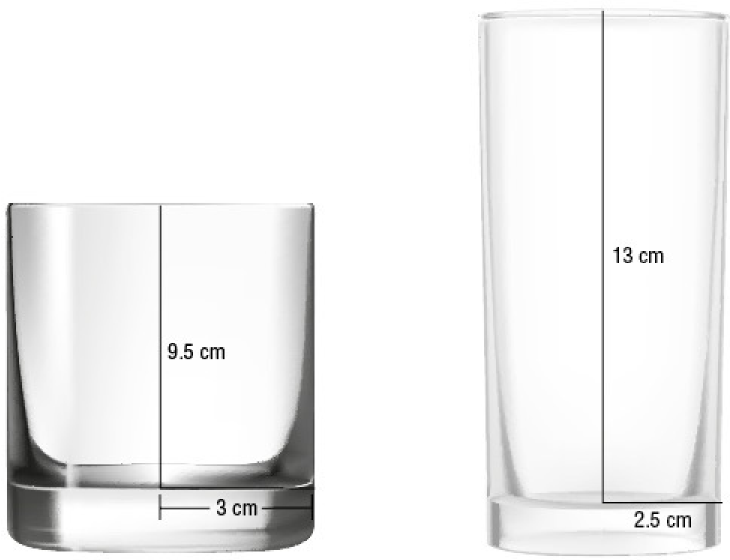
Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean la información y respondan las preguntas.

Iván quiere elegir el vaso que pueda contener más agua de su sabor favorito.

Hay dos vasos de base circular. El radio del primero mide 3 cm y su altura es de 9.5 cm; mientras que el segundo posee una base cuyo radio es de 2.5 cm y su altura es de 13 cm.



a) ¿Cómo se llama la forma geométrica de ambos vasos? ______________________

b) ¿Cuánto mide el área de la base de cada vaso? ______________________

c) ¿Qué vaso tiene mayor área de la base? ______________________

d) ¿A cuál vaso consideran que le cabe más refresco? Justifiquen su respuesta.

____

2. Compartan sus respuestas con sus compañeros y determinen qué vaso debe escoger Iván.

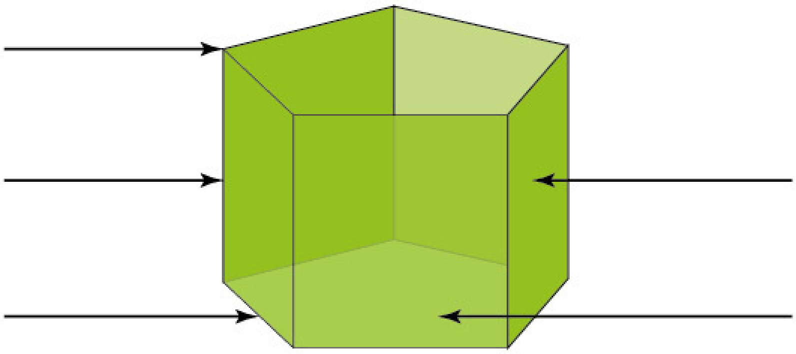
Ruta del saber

Prismas

Actividad 2

1. **Identifiquen los elementos del siguiente prisma y anoten sus nombres sobre la flecha correspondiente.**

Arista Vértice Base Altura Cara lateral



Relaciona

En cursos anteriores, tanto en primero de secundaria como en los de primaria, has estudiado los elementos de los prismas cuyas bases están formadas por un triángulo equilátero o un cuadrado.

En caso de que necesites recordarlos, será importante que repases dichos elementos.

2. **Respondan las preguntas con base en el prisma pentagonal anterior.**
   a) ¿Cuántos vértices posee? ______
   b) ¿Cuántas aristas presenta? ______
   c) ¿Cuántas caras tiene? ______
   d) De todas sus caras, ¿cuántas se llaman base? ______
   e) ¿Cuántas caras laterales tiene? ______

3. **Escriban una definición de prisma. Tomen en cuenta sus respuestas anteriores y cómo influye la base del prisma para nombrarlo.**

4. **Intercambien sus respuestas con las de otras parejas.**
   a) Expliquen cómo identificaron cada parte del prisma. Examinen si sus argumentos son correctos y corrijan en caso de ser necesario.
   b) Comparen su definición de prisma y generen una final. Pidan asesoría a su docente para verificar su respuesta.

Actividad 3

1. **Tracen, en el siguiente espacio, el cuerpo geométrico descrito.**
    - Posee dos caras hexagonales.
    - Tiene ocho caras de las cuales seis son caras cuadradas e iguales.
    - No todas sus caras son de la misma forma.
    - Presenta 18 aristas.

2. **Determinen el prisma del que se trata con base en los elementos mencionados.**
    - Escriban el nombre del polígono que tiene por base.
    - Escriban el nombre del prisma.

a) Prisma que tiene 15 aristas en total.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

b) Prisma que tiene ocho caras, considerando las bases y las laterales.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

c) Prisma de ocho caras laterales.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

d) Prisma que posee 18 vértices.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

e) Prisma de cinco caras laterales.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

f) Prisma de cinco caras en total.
Base: ____________________
Prisma: ____________________

3. **Muestren su trazo al grupo y expliquen por qué cumple con las condiciones especificadas anteriormente. Corríjanlo si es necesario.**

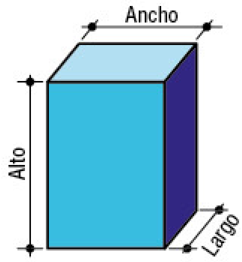
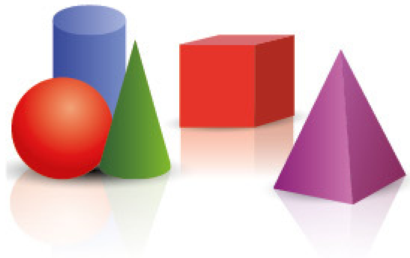
InfórMate

Cuerpos geométricos

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que ocupa un lugar en el espacio y se distingue por sus tres dimensiones: largo, ancho y alto. Por tanto, tiene volumen.

Los cuerpos geométricos se clasifican en dos grandes ramas:

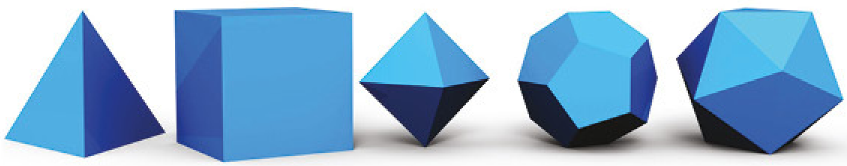
- Poliedros. Son figuras cuyas caras son planas.
- Cuerpos redondos. Son aquellos en los cuales al menos una de sus caras es curva.

Dimensiones de un cuerpo geométrico	Ejemplos de cuerpos geométricos
	

Poliedros

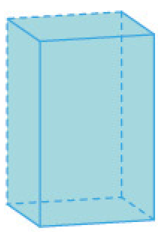
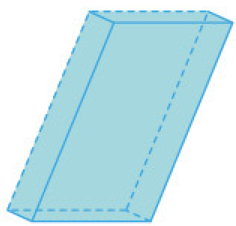
Los poliedros se dividen en:

a) Poliedros regulares: todas sus caras son iguales. Existen cinco cuerpos dentro de esta clasificación: tetraedro, octaedro, hexaedro o cubo, icosaedro y dodecaedro. Estos también se denominan sólidos platónicos.

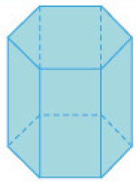
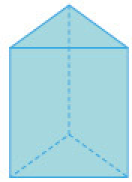


b) Poliedros irregulares: no todas sus caras son iguales. A esta clase pertenecen los prismas y las pirámides, y a su vez, ambos se subdividen en rectos y oblicuos.

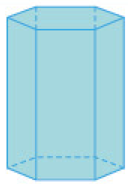
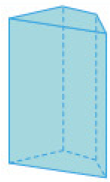
- Los prismas se constituyen por dos bases poligonales iguales unidas por caras laterales que son paralelogramos. Se llaman prismas rectos cuando sus caras laterales son perpendiculares a las bases y prismas oblicuos en caso contrario.

Prisma recto	Prisma oblicuo
	

- Los prismas reciben su nombre por el polígono que tiene por bases. Por ejemplo:

Prisma hexagonal	Prisma triangular
	

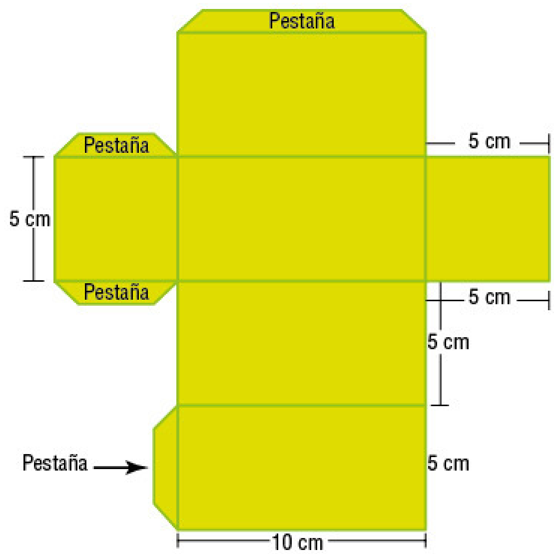
- Los prismas se llaman prismas regulares cuando sus bases son polígonos regulares, de lo contrario se llaman irregulares.

Prisma regular	Prisma irregular
	

Actividad 4

1. **Reúnan el siguiente material.**
   - Un pliego de cartulina de su color favorito
   - Una regla graduada
   - Tijeras
   - Pegamento
   - Una bolsita de celofán (la más fina o delgada que consigan)
   - Una taza de medidas en mililitros (como las que se usan en repostería)
   - Una taza con agua
2. **Hagan lo que se pide en cada inciso.**

   a) Tracen, en la cartulina el diagrama de la siguiente imagen de acuerdo a las medidas que se indican.



Y tú, ¿qué harías?

¿Qué consideras más importante: poseer bienes materiales o tu relación con seres amados y cercanos? Te invitamos a compartir con tus compañeros acciones y actitudes que practicas para mejorar la interrelación con los demás, así como las ventajas que de esto se deriven.

b) Recorten el diagrama y doblen las aristas.
c) Construyan el prisma cuadrangular pegando las pestañas con el lado correspondiente. Dejen la tapa superior sin pegar.

- Presenten sus prismas para verificar que sean de la misma forma y medida.
- Ajusten o reconstruyan sus prismas en caso de que sea necesario.

3. **Coloquen la bolsita de celofán dentro del prisma de manera que esta ocupe la base y caras internas. Corten el excedente de la bolsita.**

4. **Llenen de agua el prisma con mucho cuidado hasta el ras. Cuiden que la bolsita interna no tenga arrugas o se formen burbujitas.**

a) Viertan en la taza medidora toda el agua que cupo en el prisma.
b) Registren la cantidad de mililitros de agua.

5. **Presenten los resultados que obtuvieron y regístrenlos en la pizarra.**

6. **Respondan.**

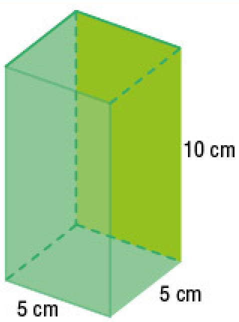
a) ¿A qué valor se aproximaron? ____________________

____

b) Determinen cuál es la cantidad en centímetros cúbicos que tiene el prisma empleando la equivalencia siguiente, $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$.

7. **Realicen una investigación para conocer la forma de obtener el volumen de un prisma de base cuadrada.**

a) Calculen el volumen de su prisma en centímetros cúbicos de acuerdo a esta investigación.

	Volumen: ____________ cm^3

8. **Comparen el volumen obtenido en el numeral anterior con los centímetros cúbicos obtenidos en el numeral 6.**

a) ¿Resultaron similares?
b) ¿Por qué?

Actividad 5

1. **Lean la información expuesta a continuación.**

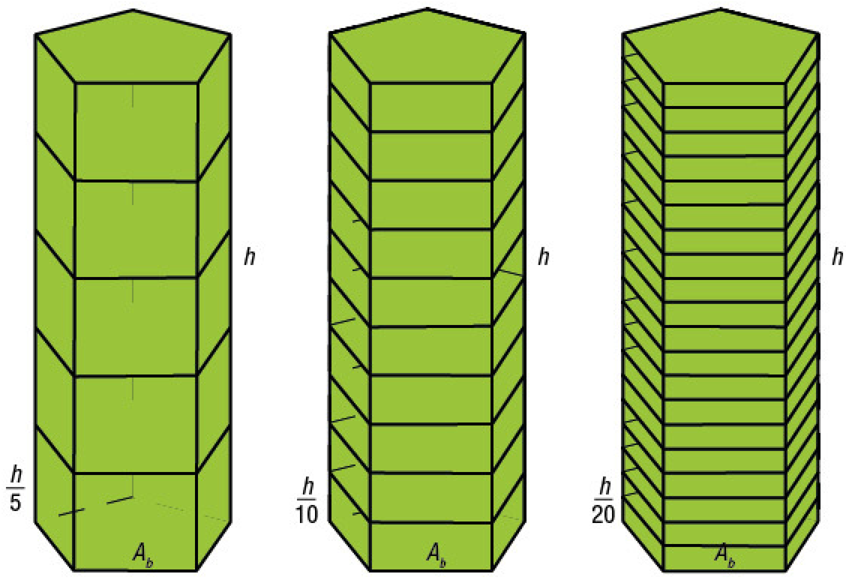
Un prisma pentagonal de altura h, primero se ha dividido en cinco partes iguales; posteriormente, en 10 y, por último, en 20 como lo muestran las siguientes figuras.

En la primera división, la altura de cada segmento mide $h/5$, en la segunda mide $h/10$ y en la tercera cada fragmento tiene altura igual a $h/20$. Y el volumen del prisma es la suma de los volúmenes de las partes en que está dividido.

El prisma pentagonal se puede seguir dividiendo en 40, 80, 160 y partes cada vez más delgadas, hasta obtener cortes cuyo grosor sea parecido al de una hoja de cuaderno, quedando con área $A_b = \frac{P \times a}{2}$ y con altura casi nula.

Dado que su altura sería imperceptible, su volumen se aproximaría a cero sin llegar a serlo. Esto garantiza que al apilar tantas láminas como el número en que se haya dividido la altura, éstas llenan el volumen del prisma.

De tal manera, podemos decir que el volumen se llena con el área de cada lámina pentagonal, es decir, que el volumen será el área del pentágono tantas veces como láminas tengamos.



2. **Respondan con base en la información anterior.**

a) ¿Qué dimensión del prisma hace que éste tenga volumen? ______________

____

b) Si dividimos la altura del prisma en 500 partes y llamamos V_{500} al volumen de cada rebanada, ¿cómo se calcula el volumen del prisma? ______________

____

c) ¿Cuánto mide la altura de 1 000 000 de laminitas apiladas, si cada una tiene altura $\frac{h}{1\,000\,000}$, es decir, a qué es igual $1\,000\,000\left(\frac{h}{1\,000\,000}\right)$? ______________

____

d) Si el volumen de cada rebanada se va acercando a cero, ¿por qué el volumen del prisma no es cero? ______________________________

____

e) ¿Cómo se calcula el volumen del prisma?

3. **Compartan sus respuestas anteriores e intercambien razonamientos.**

4. **Lleven a cabo lo siguiente con asesoría de su docente.**

a) Verifiquen la fórmula para determinar el volumen del prisma pentagonal.

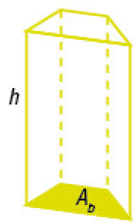
b) Generen una fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma regular.

InfórMate

El volumen V de un prisma se puede calcular por medio de la fórmula:

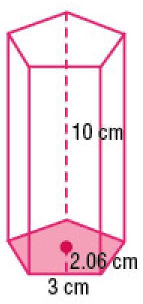
$$V = A_b \times h,$$

donde A_b es el área de la base y h la altura del prisma.



Ejemplo:

Calcularemos el volumen del siguiente prisma regular pentagonal.



La base es un pentágono regular, por lo que su área es:

$$A_b = \frac{P \times a}{2} = \frac{3 \times 5 \times 2.06}{2} = 15.45 \text{ cm}^2$$

Ahora, determinamos el volumen:

$$V = A_b \times h = 15.45 \times 10 = 154.5 \text{ cm}^3$$

De interés

En el caso de los líquidos, el volumen se relaciona con la capacidad, por ello se tiene la equivalencia:

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

Tal y como ya has analizado en la lección 10 de este libro.

PARA TIC

Ingresa al siguiente enlace donde encontrarás un resumen sobre los prismas.

https://bit.ly/2lfYZy5

(Consulta: 26 de marzo de 2018).

Actividad 6

1. **Relaciona cada prisma con su volumen.**

a) $A_b = 32\text{ cm}^2$
Altura = 3 cm ______ 252 cm^3

b) $A_b = 25\text{ cm}^2$
Altura = 10 cm ______ 124.25 cm^3

c) $A_b = 24.5\text{ cm}^2$
Altura = 12 cm ______ 96 cm^3

d) $A_b = 49.7\text{ cm}^2$
Altura = 2.5 cm ______ 294 cm^3

e) $A_b = 35\text{ cm}^2$
Altura = 7.2 cm ______ 250 cm^3

2. **Calcula el volumen de los prismas siguientes.**

a) Un frasco de mermelada es un prisma regular hexagonal. Si el área del hexágono es de 23.5 cm^2 y la altura del frasco es de 10 cm, ¿cuál es el volumen del frasco.

b) La caja de un perfume es un prisma cuadrangular. Si su base mide 8 cm por lado y su altura es de 20 cm.

- ¿Cuál es su volumen? Hagan sus operaciones en el espacio siguiente.

3. **Comparen sus respuestas.**

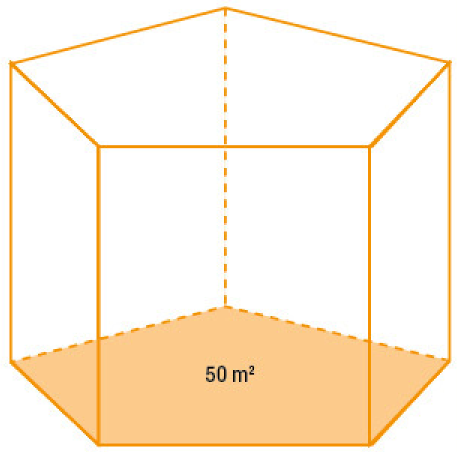
a) Intercambien ideas y analicen cómo obtuvieron sus resultados.
b) ¿Tuvieron algún problema al utilizar la fórmula de volumen?
c) ¿Qué valores se deben conocer para calcular el volumen de un prisma?

Actividad 7

1. Resuelvan cada uno de los siguientes problemas.

a) Una piscina tiene forma de prisma pentagonal. Su volumen es de 125 m^3 y el área de la base es de 50 m^2.

- ¿Cuál es la profundidad de esta piscina?

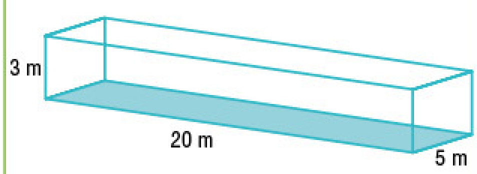


Profundidad de la piscina: ______ m.

- ¿Cuánta agua, en dm^3, cabría en la piscina si su profundidad fuese de 2 m?
______
- Si el área de la base de la piscina aumentase al doble, ¿también aumentaría el volumen al doble? Expliquen su respuesta. ______
______

b) Una piscina tiene forma de prisma rectangular y sus dimensiones son 5 m de ancho, 20 m de largo y 3 m de profundidad.

- ¿Cuál es la cantidad de agua que puede guardar la piscina?



Cantidad de agua que puede contener la piscina: ______ m^3.

- En caso de que se desee cambiar la profundidad de la piscina para que contenga 230 m^3 de agua, ¿qué profundidad debe tener? ______
______
- En caso de que se quiera cambiar el largo de la piscina para que almacene 262.5 m^3, ¿qué largo debe tener? ______
______
- En caso de que se desee cambiar el ancho de la piscina para que contenga 168 m^3, ¿qué ancho debe presentar? ______

De interés

Las siguientes equivalencias te serán útiles en esta actividad:

$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$

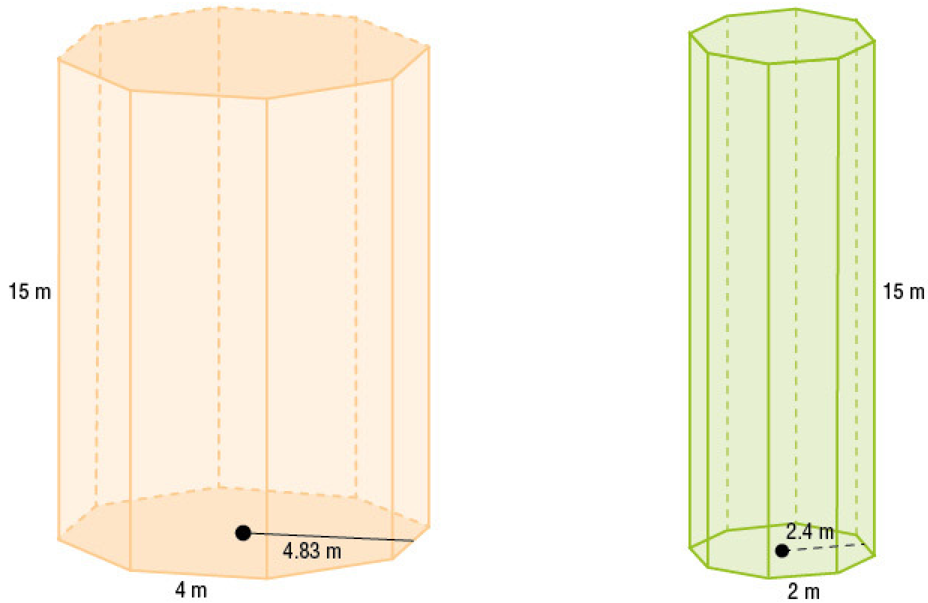
$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$

c) Se van a construir dos contenedores de agua con una capacidad de 27 cm^3.

Uno será un cubo, el segundo será un prisma pentagonal. Determina lo que se pide a continuación.

- ¿De qué medidas deberá ser el cubo? ______
- ¿Cuál será la altura del prisma pentagonal si su base tiene un área de 6.88 cm^2? ______
- ¿Cuál será el área de la base del prisma pentagonal si su altura es de 3.51 cm? ______
- ¿Cuál es la capacidad del prisma que contiene a una pirámide hexagonal de 27 cm^3 de volumen? ______

d) En una granja hay dos contenedores de grano. El más antiguo tiene forma de prisma octagonal de 3.75 m altura, 4 m de lado y 4.83 m de apotema. El más nuevo tiene forma de prisma octagonal de 15 m de altura, 2 m de lado y 2.4 m de apotema. ¿En cuál de los dos se puede guardar más grano?



2. Compartan sus respuestas y verifiquen sus procedimientos empleados. Corrijan, en caso de que haya errores.

Relaciona

En tu curso de *Matemáticas* de primer grado aprendiste qué propiedades de la igualdad aplicar para poder realizar un despeje. Repasa estos aspectos de ser necesario.

InfórMate

Despejes de variables en la fórmula de volumen de un prisma

En ocasiones lo que se conoce es el volumen de un prisma y su altura y se desea conocer el área de su base o bien, se conoce el volumen y el área de la base y se busca la altura.

Para resolver estos problemas basta con plantear una ecuación en donde la incógnita es el valor buscado y luego despejarla.

Ejemplo:

Determina el valor de la altura h de un prisma cuya base tiene un área de 80 cm² y tiene un volumen de 544 cm³.

La relación matemática del volumen es:

$$V = A_b \times h$$

Donde A_b es el área de la base y h es la altura del prisma.

Se tienen los datos conocidos, $V = 544\ \text{cm}^3$ y $A_b = 80\ \text{cm}^2$.

Sustituimos los valores conocidos en la relación anterior lo que nos da la ecuación:

$$544\ \text{cm}^3 = 80\ \text{cm}^2 \times \text{h}$$

Realizamos el despeje de la variable h dividiendo ambos lados entre 80 cm²:

$$\frac{544\ \text{cm}^3}{80\ \text{cm}^2} = \frac{80\ \text{cm}^2 \times h}{80\ \text{cm}^2}$$

$$6.8\ \text{cm} = h$$

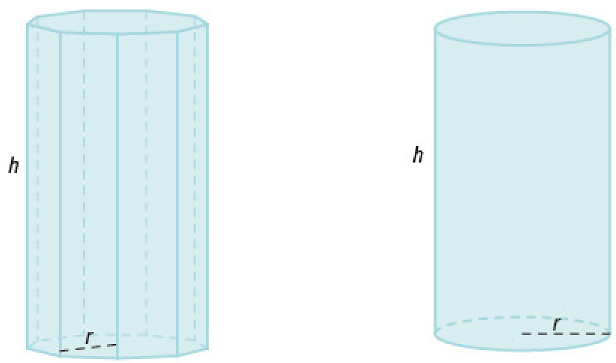
Por lo tanto, el valor de la altura del prisma es igual a 6.8 cm.

Los cilindros

Actividad 8

1. **Observen cada par de figuras y respondan lo que se pide.**

   a) A continuación se muestran un prisma regular cuya base es un polígono de nueve lados y altura h y un cilindro con igual radio que el eneágono e igual altura.



- Anoten las diferencias que observan entre ellas. ______________________

____

____

____

- Recordando que al área de un círculo puede aproximarse mediante un polígono inscrito y tomando en cuenta la fórmula para hallar el volumen de un prisma regular, escriban la fórmula para calcular el volumen de un cilindro.

____

b) Apliquen la fórmula obtenida para hallar el volumen de una lata de atún cuya base tiene un radio de 4 cm y su altura es también de 4 cm.

- Datos conocidos:

- Procedimiento:

- Volumen: ______

2. **Intercambien sus respuestas.**

a) ¿Obtuvieron lo mismo en el volumen de la lata de atún?
b) ¿Obtuvieron la misma fórmula para calcular el volumen de un cilindro?
c) ¿Qué relación encontraron entre la fórmula para hallar el volumen de un cilindro y la del volumen de un prisma?
d) Corroboren sus respuestas con su docente.

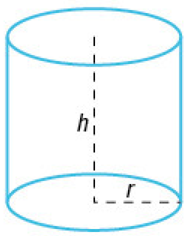
InfórMate

Uno de los principales cuerpos redondos es el cilindro.

Cilindro. Objeto compuesto por dos bases circulares iguales y paralelas, y una superficie lateral curva y cerrada en forma de rectángulo. Las bases circulares tienen un radio r, la altura del cilindro se representa por h y es la distancia entre las dos bases circulares.

Su volumen se calcula con la fórmula:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$



El cilindro puede pensarse como un prisma cuya base es un polígono con una gran cantidad de lados, de modo tal que se forma una base circular.

Ejemplo:

Determina el valor del volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 5 cm y una altura de 25 cm.

Sustituimos estos valores en la fórmula correspondiente:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$
$$V = \pi \times (5 \text{ cm})^2 \times 25 \text{ cm}$$

Sustituimos los valores conocidos, $\pi = 3.14$ y $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$, y obtenemos:

$$V = 3.14 \times 25 \text{ cm}^2 \times 25 \text{ cm} = 1\,962.5 \text{ cm}^3$$

Por tanto, el volumen del cilindro es $1\,962.5 \text{ cm}^3$.

Actividad 9

1. **Resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

   a) ¿Cuántos litros de agua puede almacenar un contenedor en forma cilíndrica que tiene 2 m de radio y 5 m de altura?

Litros que puede guardar el contenedor: ____________ .

   b) Un restaurante compra un tinaco de 25 000 litros de capacidad. Este tinaco cilíndrico tiene una altura de 3.9 m. ¿Cuánto mide el diámetro de su base?

Diámetro de su base: ____________ m.

   c) ¿Cuál es el volumen de una lata de chícharos que tiene un diámetro de 6 cm y una altura de 8 cm?

Volumen: ____________ cm^3.

De interés

Recuerda que un litro es iguala a 1 dm^3, así que 1 m^3 equivale a 1 000 L.

$1\ m^3 = 1\ 000\ L$

Glosario

Diámetro. Segmento que une dos puntos de una circunferencia y que pasa por el centro de la misma. Equivale a dos radios.

d) Una perfumería compró botellas para envasar los más selectos aromas. Estas botellas son de forma cilíndrica y sus bases tienen un radio de 2 cm. Si la perfumería sabe que el volumen total de estas botellas es de 190 cm^3 y quiere empacarlas en cajas en forma de prismas cuadrangulares, ¿de qué dimensiones mínimas han de ser dichas cajas si la tapa que cubre a la bálbula tiene una altura de 2 cm?

De interés

Recuerda que un centímetro cúbico es igual a un mililitro, es decir:

$1\ cm^3 = 1\ ml$

Largo: ______ cm.

Ancho: ______ cm.

Altura: ______ cm.

e) ¿Cuántos mililitros contendrán las botellas de aromatizante de autos si su radio mide 2 cm y su altura, 9 cm?

Capacidad de las botellas de aromatizante: ______ ml.

f) ¿Cuál es la profundidad de una piscina de forma circular si se sabe que tiene un diámetro de 7 m y su capacidad es de 63 000 litros?

Profundidad:: ______ ml.

2. Comparen las operaciones y respuestas de cada uno de los problemas anteriores. Corrijan, en caso de haber errores.

Pausa en el camino

Actividad 10

1. **Retoma la actividad inicial de esta lección, la relacionada con los vasos que posee Iván.**

   a) Calcula el volumen del primer vaso (emplea $\pi = 3.14$).

   b) Determina el volumen del segundo vaso (emplea $\pi = 3.14$).

   c) ¿Existe diferencia significativa para que Iván se decida por un vaso u otro?, ¿por qué? ______________________

2. **Determina la altura, en centímetros, que debe poseer un vaso cilíndrico como los anteriores, con un volumen de 255 cm^3 y un radio de 2 cm.**

3. **Dibujen un prisma regular con base pentagonal, su apotema es de 2.75 cm y uno de sus lados mide 4 cm. Su volumen es de 765 cm^3. Calculen su altura.**

4. **Presenten sus resultados y compárenlos con los de sus demás compañeros, de forma que refuercen las fórmulas aplicadas.**

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

¿Qué nos dice la gráfica?

Aprendizaje esperado: Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Inicio del camino

Actividad 1

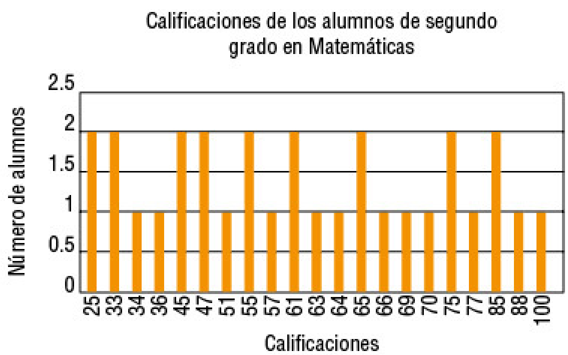
1. **Lean el planteamiento del siguiente problema.**

Para analizar el desempeño de los alumnos de segundo grado, en Matemáticas, y determinar si existe un problema de reprobación, es necesario elaborar una gráfica de barras a partir de sus calificaciones. Las calificaciones de 30 alumnos son las siguientes:

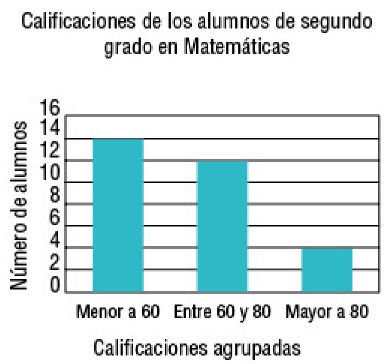
85	65	57	66	25	70	85	36	61	34
55	51	47	47	64	75	65	61	45	75
33	33	100	69	77	88	63	25	45	55

Se presentaron dos propuestas de gráficas.

Propuesta 1



Propuesta 2



2. **Respondan las preguntas con base en la información anterior.**

a) ¿Ambas gráficas representan de forma correcta las calificaciones de los alumnos? ¿Por qué? ______

b) ¿Cuál gráfica consideran que permite analizar con mayor facilidad si existe un problema de reprobación de los alumnos? Justifiquen su respuesta. ______

c) Dibujen, en su cuaderno, una gráfica similar a la propuesta 2, pero que sólo tenga dos barras: Reprobados y Aprobados. Recuerden que la calificación mínima de aprobación es 60. ______

Ruta del saber

Tablas de distribución de frecuencias

Datos no agrupados y agrupados en intervalos

Actividad 2

1. **Lean la siguiente información.**

Se preguntó a 50 alumnos de una escuela por la cantidad de hermanos o hermanas que tienen. Los resultados son los siguientes:

4	3	2	1	0	6	3	2	5	0
4	9	4	5	2	2	3	2	4	6
1	0	6	0	1	3	2	2	5	3
1	2	5	0	1	1	2	2	4	5
2	0	6	4	5	3	3	0	2	2

2. **Completen la tabla de acuerdo con los datos anteriores.**

Cantidad de hermanos	Frecuencia de personas con esa cantidad de hermanos
	Total = 50

a) ¿Es necesario colocar en la primera columna los valores 7 y 8? Justifiquen su respuesta.

3. **Intercambien los valores de la tabla anterior y expliquen por qué la completaron de esa manera. Corrijan si es necesario.**

Actividad 3

1. **Lean la información presentada a continuación.**

Se midió la estatura de 50 alumnas de una escuela y los resultados, en centímetros, fueron los siguientes:

143	134	162	156	170	165	133	152	155	140
164	129	148	153	127	142	137	162	149	166
172	160	163	170	163	139	162	172	155	153
146	142	153	140	163	132	152	172	164	165
142	160	159	147	167	137	139	168	167	174

Glosario

Intervalo de números. Conjunto de números que se encuentra entre dos números dados.

Por ejemplo, en el intervalo de números enteros del 5 al 10 se ubican el 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

2. **Con base en la información anterior, completen la tabla.**

Intervalo de estatura en centímetros	Frecuencia
120-127	1
128-135	
	10
144-151	4
	9
160-167	
168-175	7

3. **Respondan las siguientes preguntas de acuerdo con la tabla anterior.**

a) ¿Cuál es el intervalo con mayor frecuencia? ______________________

b) Si una alumna mide 158 cm de altura, ¿en qué intervalo estará? ______________________

4. **Intercambien su tabla y comparen las respuestas que dieron a las preguntas anteriores. Corrijan, en caso de ser necesario.**

Y tú, ¿qué harías?

Cada vez, más millones de jóvenes emplean las redes sociales. Muchos opinan que son de utilidad, pues se enteran de las noticias al momento; además, pueden comunicarse con sus familiares que viven en lugares lejanos. Sin embargo, cuando se usan de forma inadecuada puede causar grandes problemas a uno mismo y a terceras personas. ¿Qué harías para evitar el mal uso de las redes sociales? ¿De qué formas las puedes aprovechar para mejorar tu comunidad?

InfórMate

Para analizar los datos de un experimento o encuesta, éstos pueden organizarse en tablas de distribución de frecuencias, ya sea a partir de los distintos datos que se obtuvieron o al agrupar los datos en intervalos. Esto dependerá de la cantidad de los datos distintos que se tengan. Por ejemplo, en la actividad 2, donde había pocos datos diferentes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9), la tabla se organizó en dos columnas: a la primera, corresponden dichos datos y a la segunda, la cantidad de veces que aparecen los mismos, es decir, su frecuencia. Pero en la actividad 3, donde resultaron muchos datos distintos, convino ordenar la tabla a partir de intervalos. La tabla se realizó anotando sobre la primera columna los 7 intervalos en los que se dividió el conjunto total de datos y sobre la segunda, se indicó la cantidad de datos concernientes a cada intervalo. Esta cantidad de datos pertenece a la frecuencia de cada intervalo.

Cuando se construyen tablas como las anteriores es indispensable conocer algunos términos importantes:

- El rango (r) de una colección de datos es la diferencia entre el dato mayor y el menor.
- El número de clases o intervalos (k) corresponde al número de grupos en los que se dividen los valores de una variable.
- La amplitud de clase o ancho del intervalo (a) es la diferencia entre el límite superior e inferior de cada intervalo.
- La marca de clase (m) de un intervalo o clase se define como el punto medio de ese intervalo y se obtiene al promediar los extremos del mismo.

Ejemplo:

Para construir una tabla de distribución de frecuencias con 6 intervalos que permita organizar la cantidad de minutos que 40 jóvenes pasan en redes sociales durante un fin de semana conviene proceder como se indica a continuación.

119	135	138	144	146	150	156	164
125	135	140	144	147	150	157	165
126	135	140	145	147	152	158	168
128	136	142	145	148	153	161	173
132	138	146	149	154	142	163	176

Primero, calcularemos el rango de los datos: $r = 176 - 119 = 57$. Como se requieren 6 intervalos, o clases, entonces $k = 6$. Para determinar la amplitud que debe tener cada intervalo, se realiza lo siguiente:

$$a = \frac{r}{k} = \frac{57}{6} = 9.5, \text{ al redondearlo, } a = 10.$$

Luego, estimaremos los intervalos de la tabla.

- Primer intervalo. Este inicia con el dato menor: 119 (el cual será el extremo inferior del intervalo) y le sumamos $a - 1 = 10 - 1 = 9$ para obtener su extremo superior, es decir, $119 + 9 = 128$. Por tanto, el intervalo queda así: 119-128.
- Segundo intervalo. Inicia con el extremo superior del intervalo anterior más uno, es decir, $128 + 1 = 129$. El extremo superior es $129 + 9 + 138$. Por tanto, el segundo intervalo es 129-138.
- De forma sucesiva calcularemos el resto de los intervalos.

Después, haremos una tabla como la siguiente. Le colocaremos, en la columna de frecuencia, la cantidad de datos que están en el intervalo correspondiente. Por ejemplo, en el intervalo 119-128 la frecuencia es 4, pues sólo 4 datos de los 40 pertenecen a ese rango (119, 125, 126 y 128).

La marca de clase (m) se obtiene al promediar cada extremo del intervalo correspondiente, por ejemplo, en el primer intervalo será: $m = \frac{119 + 128}{2} = 123.5$.

Finalmente, la tabla resultante sería la siguiente:

Intervalo	Frecuencia (f)	Marca de clase (m)
119-128	4	123.5
129-138	7	133.5
139-148	13	143.5
149-158	9	153.5
159-168	5	163.5
169-178	2	173.5
Total	$n = 40$	

Actividad 4

1. Consigan los instrumentos de medición indicados a continuación.
   - Báscula
   - Flexómetro o cinta métrica
2. Midan, con la báscula, la masa corporal de sus compañeros y registren los datos obtenidos en la siguiente tabla de distribución de frecuencias. En caso necesario, agreguen los intervalos pertinentes antes o después de los ya señalados.

Masa corporal en kilogramos	*f*	*m*
41-49		
50-59		
60-69		
70-79		
80-89		
90-99		
	$n =$	

a) ¿En qué intervalos hay más alumnos? ____________________

b) ¿Qué expresa lo anterior acerca de su grupo, en términos generales? ____________________

3. Midan la altura de sus compañeros y registren los datos en la siguiente tabla de distribución de frecuencias. Si es necesario, escriban intervalos antes o después de los ya propuestos.

Altura en centímetros	*f*	*m*
120-129		
130-139		
140-149		
150-159		
160-169		
170-179		
180-189		
	$n =$	

a) ¿En qué intervalos hay más alumnos? ____________________

b) ¿Qué manifiesta lo anterior acerca de su grupo, en términos generales? ____________________

4. **Determinen la medida del calzado de sus compañeros y anoten los datos correspondientes en la siguiente tabla de distribución de frecuencias. En caso necesario, agreguen intervalos antes o después de los que ya están registrados.**

Medida del calzado en centímetros	*f*	*m*
19.6-21.5		
21.6-23.5		
23.6-25.5		
25.6-27.5		
27.6-29.5		
	n =	

a) ¿Se usaron todos los intervalos descritos? ______

b) ¿Qué significa esto en relación con los datos de sus compañeros? ______

5. **Lee la siguiente situación.**

En una secundaria, los docentes dicen que sus alumnos de segundo año son muy altos. Por lo cual, se tomó al azar un grupo con los siguientes registros de estaturas en cm:

175	180	169	152	177	145	160	172	170
158	167	172	173	159	164	182	179	181
176	173	154	155	158	160	156	148	183
172	164	166	168	154	155	175	171	169
168	163	162	179	160	154	156	159	172

Intervalo	*f*	*m*
	n =	

a) Marquen, en la tabla, la fila del intervalo que tuvo mayor frecuencia.

b) Si un alumno promedio en esa región posee una altura de 164 cm, ¿tienen razón los docentes con lo que afirmaban? Justifiquen su respuesta. ______

6. **Intercambien sus respuestas y corrijan si es necesario.**

Representaciones gráficas de datos

Actividad 5

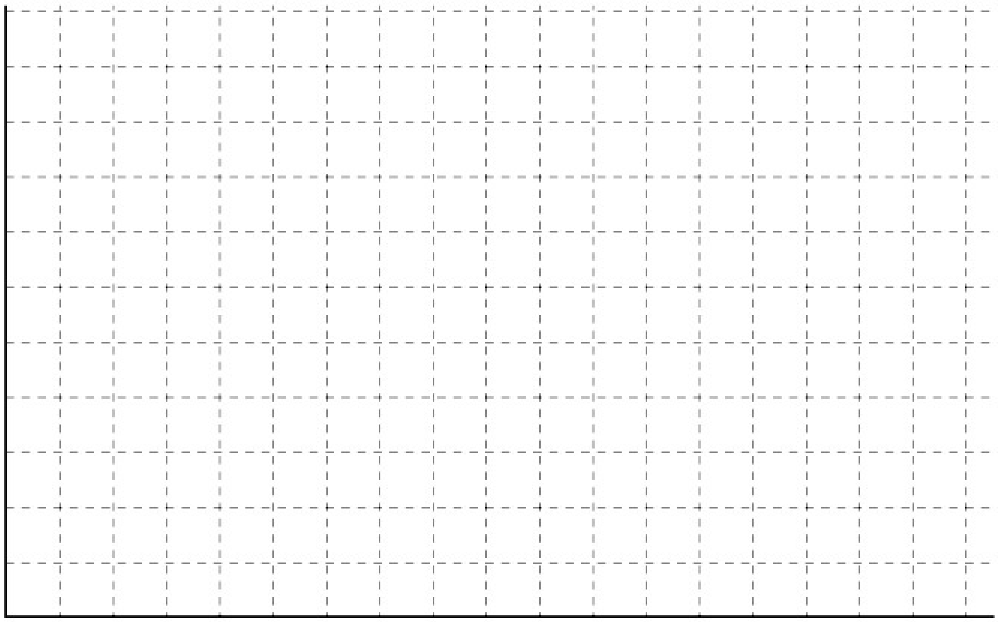
1. Retomen los datos de la actividad 3.

a) Con base en la tabla de frecuencia de dicha actividad, construyan una gráfica.

- En el eje *x*, escriban de forma continua los intervalos o las marcas de clase, en una escala que los contenga a todos.
- En el eje *y*, realicen la escala necesaria para que reúna todos los valores de las frecuencias de los intervalos.
- Dibujen barras cuyas bases tengan como centro las marcas de clase y altura igual a la frecuencia de la marca de clase respectiva. La anchura de cada barra debe ser del tamaño del intervalo o marca de clase señalado.

Relaciona

Los recursos gráficos son una herramienta que puedes aprovechar en cualquier asignatura como lo viste en el tema sobre elaboración de fichas para estudiar, en *Lengua Materna. Español 1*, ya que te permite organizar información, resumir datos o exponer comparaciones entre diferentes elementos.



2. Intercambien las gráficas que han dibujado.

a) Observen si realizaron de forma adecuada las escalas y si las barras quedaron juntas. En caso contrario, corríjanlas.

InfórMate

En estadística, es común acompañar las tablas de frecuencias de representaciones gráficas complementarias. Estas gráficas contribuyen a identificar, de manera visual, tendencias o detalles de la forma como se comportan los datos. Además, permiten presentar la información de modo atractivo, y ayudan a transmitir y comunicar resultados en forma rápida, directa y comprensible.

A continuación, describimos dos representaciones gráficas: el histograma y el polígono de frecuencias.

Histograma

Es la representación gráfica de un conjunto de datos, generalmente agrupados en intervalos, a partir de barras. Por tanto, se emplea cuando los datos provienen de variables cualitativas y de tipo continuo. El área de cada barra es proporcional a la frecuencia de los datos en cada intervalo. Éstas son las razones por las que el grosor de las barras abarca el ancho de cada intervalo.

Cuando se tiene un conjunto de datos que provienen de variables cualitativas o discretas, se utilizan las gráficas de barras. Aquí, la altura de la barra es proporcional a la frecuencia de los datos.

Para elaborar un histograma a partir de una tabla de frecuencias, se considera en el eje x a los valores de los intervalos o las marcas de clase, y en el eje y, a las frecuencias de datos dentro de cada intervalo o marca de clase respectiva. Así, se grafica una barra por cada intervalo o marca de clase con una altura igual a su frecuencia, de forma que se tengan barras contiguas.

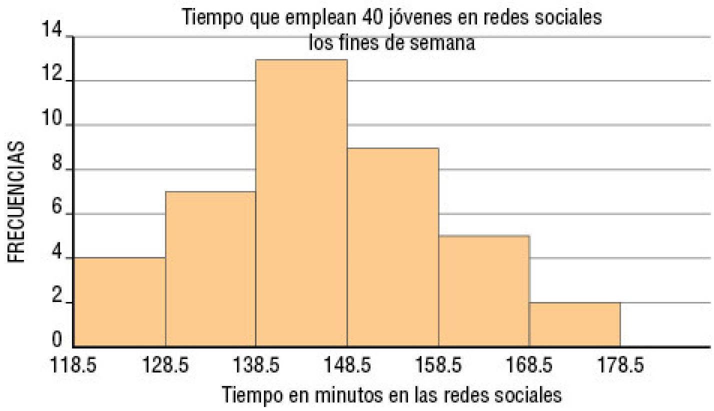
Ejemplo:

Para representar en un histograma los datos de la tabla relacionados con el tiempo en minutos que 40 jóvenes emplean en las redes sociales los fines de semana, la tabla es:

Intervalo	Frecuencia (f)	Marca de clase (m)
119-128	4	123.5
129-138	7	133.5
139-148	13	143.5
149-158	9	153.5
159-168	5	163.5
169-178	2	173.5
Total	$n = 40$	

Y con el fin de hacer una clara distinción entre el valor máximo de un intervalo y el valor mínimo del siguiente, tomamos el punto intermedio entre ellos, en este caso es 0.5, por lo que el primer intervalo abarca 118.5-128.5, el segundo comprende 128.5-138.5, etcétera.

Por lo anterior, el histograma correspondiente queda así:



PARA TIC

Con el fin de optimizar tu tiempo, dispones de herramientas informáticas que realizan gráficas. Una de ellas es la hoja de cálculo. En el siguiente enlace encontrarás un manual ilustrativo para elaborar histogramas.

https://bit.ly/2JsRvbT

(Consulta: 30 de marzo de 2018).

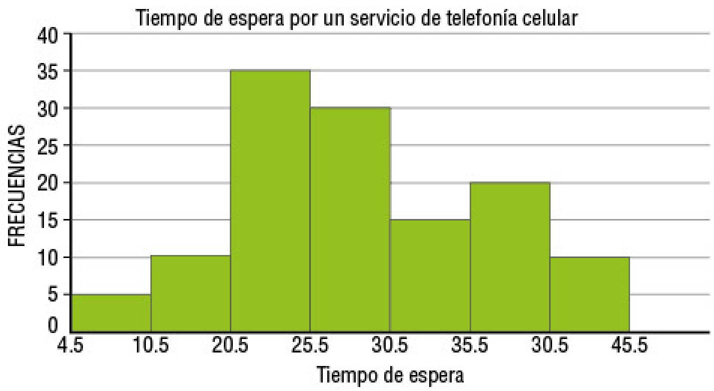
Actividad 6

1. Retomen los datos que obtuvieron en la actividad 4 (masa corporal, estatura y calzado).

2. Construyan, en sus libretas o mediante algún software informático como una hoja de cálculo, los histogramas de dichos datos.

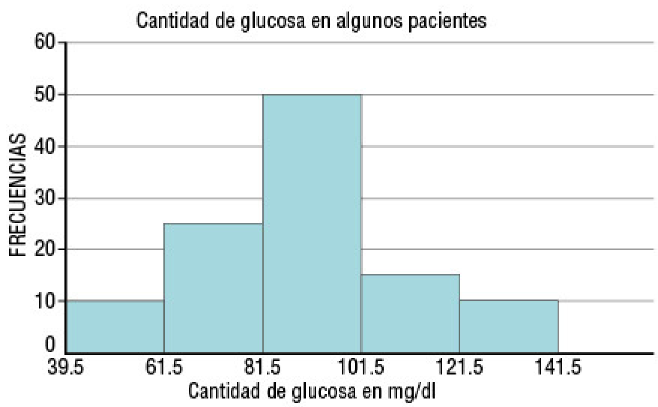
3. Analicen y respondan las preguntas que surgen a partir de cada histograma presentado a continuación.

   a) El siguiente histograma expone el resultado de entrevistar a algunos clientes de una compañía celular respecto al tiempo que esperaron desde que llegaron al establecimiento hasta que se retiraron después de ser atendidos.



   - ¿Cuántos clientes fueron entrevistados? ______________________
   - ¿Qué porcentaje de clientes tardó menos de media hora en el establecimiento? ______________________

   b) El siguiente histograma muestra el resultado de medir la cantidad de glucosa en mg/dl a cierto número de pacientes.



   - Si una persona sana debe tener entre 82 y 110 mg/dl de glucosa en sangre, ¿cuántas de esas personas están en el rango normal de glucosa? ______________________

- Si a un individuo se le considera hipoglucémico cuando presenta menos de 50 mg/dl de glucosa en su sangre, ¿cuántos de estos pacientes son hipoglucémicos? ______

4. **Compartan sus respuestas y examinen qué otra información pueden obtener a partir de las gráficas anteriores.**

    a) Hagan preguntas de análisis a sus compañeros para que averigüen las respuestas a partir de dichas gráficas.

Polígonos de frecuencias

Actividad 7

1. **Retomen los datos de la actividad 2 y construyan, en el siguiente espacio, una gráfica de acuerdo con la tabla de frecuencias ya dada y con los pasos que se dan a continuación.**

    - Escriban, en el eje *x*, la escala necesaria que contenga todos los valores correspondientes a las marcas de clase. Incluyan un valor anterior al mínimo y un valor posterior al máximo. Por ejemplo, si las marcas de clase avanzan de 5 en 5, la mínima debe ser 10.5, por ello considerarán en el eje *x* el valor 5.5; si se tiene una marca de clase mayor a 20.5, ha de considerarse en el eje *x* el valor 25.5.
    - Anoten, en el eje *y*, la escala necesaria que incluya todos los valores pertenecientes a las frecuencias de los intervalos.
    - Coloquen puntos donde a cada marca de clase le corresponda su frecuencia. Las dos marcas de clase añadidas en el eje *x* tendrán frecuencia 0.
    - Unan los puntos para constituir el polígono.

2. **Respondan de acuerdo con la gráfica creada.**

De interés

Los histogramas y polígonos de frecuencias pueden presentar en el eje *x* las marcas de clase o los límites de los intervalos.

a) ¿Qué relación existe entre esta gráfica y un histograma de frecuencias? ______

b) ¿Qué diferencias hay entre ambas gráficas? ______

c) ¿Se podrá representar un histograma y un polígono de frecuencias de una misma tabla de frecuencias en un mismo eje coordenado? ¿Qué datos aportaría? ______

3. **Intercambien, con los demás equipos, las gráficas que han dibujado.**

a) Verifiquen si realizaron de forma adecuada las escalas y si las barras quedaron juntas.
b) Identifiquen la gráfica correcta, o generen una única, en caso de ser necesario.

InfórMate

Polígono de frecuencias

Un polígono de frecuencias es la representación gráfica de datos, generalmente agrupados en intervalos, a partir de un polígono. Cada punto del gráfico o vértice del polígono significa la frecuencia respectiva de los datos correspondientes a cada intervalo y se coloca sobre la marca de clase de cada uno. Inicia en la marca de clase inmediata anterior a la primera marca de clase de datos y termina en la marca de clase inmediata superior a la última marca de clase de los datos. La frecuencia de ambas marcas de clase extra es cero y, por tanto, el punto coincide con el eje *x*. De ahí que tenga la forma de un polígono irregular.

El polígono de frecuencias es un gráfico similar al histograma, salvo que se emplean puntos y no barras verticales. Además, es común ver el polígono de frecuencias sobre un histograma.

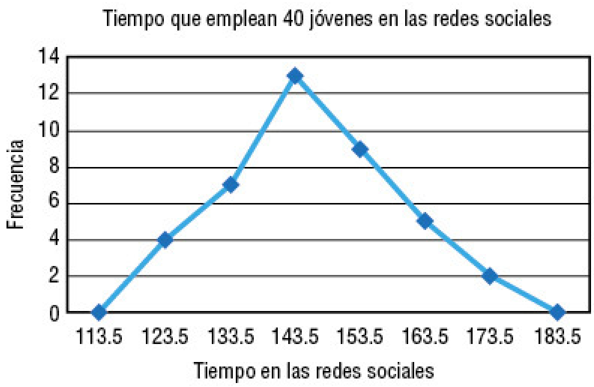
Ejemplo:

Para representar, mediante un polígono de frecuencias, los datos de la tabla relativa al tiempo en minutos que emplean 40 jóvenes en las redes sociales los fines de semana, organizamos la información de la siguiente manera.

Intervalo	Frecuencia (f)	Marca de clase (m)
119-128	4	123.5
129-138	7	133.5
139-148	13	143.5
149-158	9	153.5
159-168	5	163.5
169-178	2	173.5
Total	$n = 40$	

Como las marcas de clase van de 10 en 10, y su valor mínimo es 123.5, entonces el valor inicial en el eje x será de 113.5; el valor máximo de las marcas de clase es 173.5, por lo que el valor final en el eje x será de 183.5.

Con base en esto, el polígono de frecuencias correspondiente es:



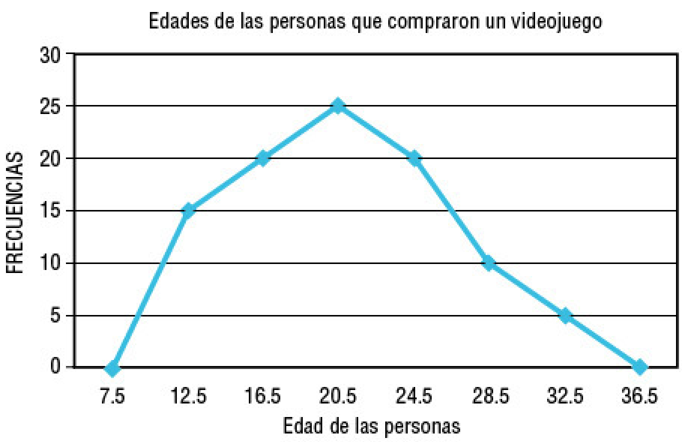
Actividad 8

1. **Retomen los datos y las tablas obtenidas en la actividad 4 y tracen, en sus libretas o mediante algún software informático, los polígonos de frecuencias correspondientes.**

2. **Construyan, en sus cuadernos o mediante algún software informático, el polígono de frecuencias de los datos del ejercicio 2 de la actividad 4.**

3. **Analicen y respondan las preguntas que surgen en cada uno de los siguientes polígonos de frecuencias.**

   a) El siguiente polígono de frecuencias representa las edades de las personas que compraron un videojuego en un establecimiento durante cierto tiempo.



- ¿Cuál es el intervalo de edad en que se compran más videojuegos?, ¿a qué creen que se deba? ______________________________

____

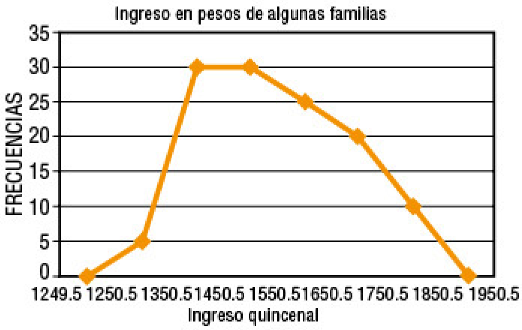
PARA TIC

En la siguiente página podrás interactuar para realizar polígonos de frecuencia e histogramas.

https://bit.ly/2KbBfge

(Consulta: 15 de junio de 2018).

b) El siguiente polígono de frecuencias señala el ingreso quincenal en pesos de algunas familias, según una encuesta realizada cerca del cono sur del estado de Yucatán.



- ¿Cuántas de las personas encuestadas ganan menos de $1 500.00? ____________

____

4. Compartan sus análisis y revisen qué otra información pueden obtener de los polígonos de frecuencias presentados.

a) Háganles preguntas de análisis a sus compañeros para que ellos respondan con base en las gráficas.

Gráficas de línea

Actividad 9

1. Representen en una gráfica, mediante puntos unidos con líneas rectas, los datos de la siguiente tabla que contiene las temperaturas promedio en la ciudad de Mérida.

Mes (x)	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Temp. en °C (y)	8.5	10	12.5	15.1	18.3	23.1	26.5	26.1	23.1	17.7	12.5	9

2. **Respondan las preguntas.**

a) ¿Qué representa el eje x? ______________________________

____

b) ¿Qué representa el eje y? ______________________________

____

3. **Compartan sus respuestas e identifiquen si otros equipos tienen alguna diferencia en sus resultados.**

a) Argumenten sus respuestas y consideren las de sus compañeros.
b) Hallen las respuestas correctas y corrijan de ser necesario.

InfórMate

Gráficas de línea

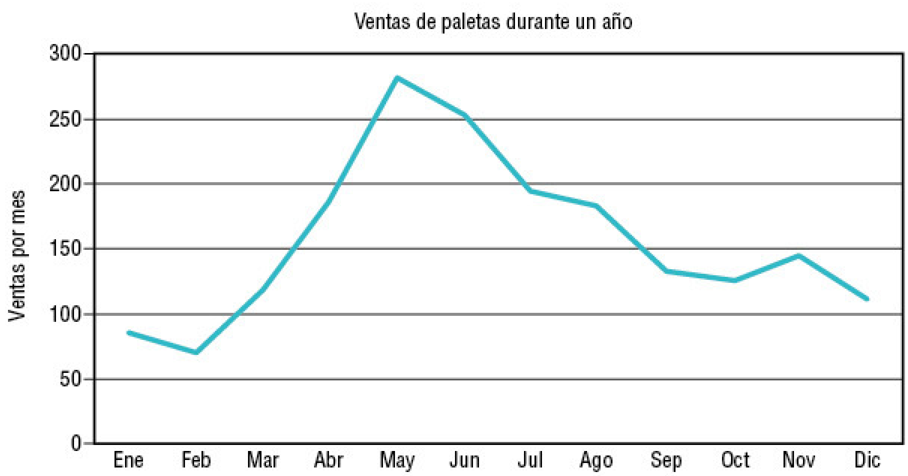
Éstas son útiles cuando se quiere representar el comportamiento de ciertos datos respecto al tiempo.

Por ejemplo, la cantidad de ventas de una empresa durante un mes, el costo de un auto a lo largo del tiempo, etcétera.

Una de las diferencias de este gráfico respecto al polígono de frecuencias es que las gráficas de línea no se reducen a contar las frecuencias, sino que presentan los valores de un fenómeno o situación respecto al tiempo.

Ejemplo:

La siguiente gráfica de línea representa la cantidad de paletas vendidas durante un año en cierta paletería.



Actividad 10

1. **Dibujen, en su cuaderno, los gráficos de línea para cada uno de los datos expuestos en los incisos siguientes.**

   a) Se presentan los resultados de la distancia en metros que recorre un objeto respecto al tiempo en segundos.

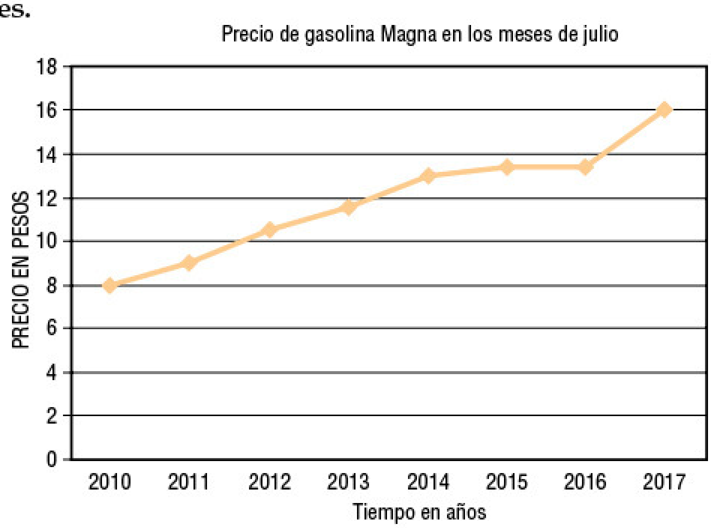
Tiempo	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Distancia	0	50	100	150	190	210	300	400	600

   b) Se presenta la cantidad de bacterias de un cultivo en un laboratorio durante el paso de las horas.

Tiempo	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Cantidad	6	8.5	8.5	9	9	9.5	9	8.5	8

Actividad 11

1. **Interpreta la información de la siguiente gráfica para contestar las preguntas posteriores.**



PARA TIC

En el siguiente enlace encontrarás ayudas sobre cómo realizar un gráfico de líneas, así como la manera de personalizarlo con una hoja de cálculo.

https://bit.ly/2JtTA7E

(Consulta: 30 de marzo de 2018).

   a) ¿Qué se representa en el eje x? ______________________

   b) ¿Entre qué años se registró el mayor incremento en el precio de la gasolina? ______________________

   c) ¿Esta gráfica tocará, en algún momento, el eje x como lo hacía el polígono de frecuencias?, ¿por qué? ______________________

2. **Comparen sus respuestas.**

   a) Verifiquen si sus respuestas son correctas, en caso contrario, corríjanlas.

Pausa en el camino

Actividad 12

1. **Lean la siguiente información.**

Las calificaciones de 100 alumnos de segundo grado son las siguientes.

100	87	54	82	93	47	40	53	88	58
84	65	57	66	25	70	85	36	61	34
62	93	98	58	95	83	33	70	51	60
55	51	47	47	64	75	65	60	45	75
77	55	100	80	55	52	85	68	53	82
82	85	62	72	65	76	23	96	30	45
33	33	100	69	77	88	63	17	42	55
98	70	68	70	65	70	84	52	60	54
57	47	57	86	25	66	40	100	32	39
90	83	64	95	85	100	67	60	42	65

2. **Respondan las preguntas.**
   a) ¿Cuál es el número de intervalos (k) a usar? ______
   b) ¿Qué amplitud (a) tendrá cada uno de los intervalos? ______

3. **Determinen la tabla de distribución de frecuencias respectiva. Elabórenla en el espacio siguiente.**

4. **Representen, en una cartulina, el polígono de frecuencias y el histograma de las calificaciones de acuerdo con la tabla de distribución anterior.**

5. **Contesten.**
   a) ¿Cuántos alumnos obtuvieron una calificación menor o igual a 48? ______
   b) ¿Cuántos alumnos lograron una calificación mayor o igual a 73? ______

6. **Presenten su tabla y su gráfica y compárenlas con las de sus demás compañeros.**

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

Promedio, lo de en medio y lo más popular

Aprendizaje esperado: Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellos conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Inicio del camino

Actividad 1

1. Lean la siguiente situación y respondan las preguntas.

A Santiago y a Juan les gusta asistir a fiestas con jóvenes de su edad. En cierta ocasión los invitaron a una, pero como no estaban animados les dieron algunos detalles de lo que se esperaba de la reunión:

- Habrá música para los gustos de los asistentes.
- Habrá comida para la necesidad de los convidados.
- Habrá buen ambiente, pues irán 7 invitados, entre hombres y mujeres, cuyo promedio de edad es de 13 años.

Relaciona

Retoma tus apuntes de *Matemáticas* de primer grado sobre las medidas de tendencia central que te ayudarán en la comprensión de esta lección.

Decidieron ir, pero al llegar observaron algo diferente a lo anterior: ¡era una fiesta infantil: seis nietos con su abuelo! Había payasos, globos, comida y música para niños. Averiguaron que las edades de los 7 invitados eran: 2, 2, 3, 3, 4, 4 y 73 años.

a) ¿El promedio de las edades de los asistentes es correcto? ______

b) ¿Algún dato proporcionado en la invitación estuvo erróneo? Argumenten su respuesta. ______

c) ¿Cuáles son la moda y la medida de las edades de los participantes? ______

d) Si en lugar de informarles el promedio de las edades les hubieran compartido la moda o la mediana de las edades, ¿habrían deducido que se trataba de una fiesta infantil? Discutan su respuesta. ______

2. Comparen sus respuestas con las de los demás compañeros.

a) Analicen por qué el promedio no aportó suficiente información acerca de los datos proporcionados.
b) ¿Cuáles medidas de tendencia central conocen?
c) ¿Qué utilidad consideran que tiene conocer las medidas de tendencia central de un conjunto de datos?

Ruta del saber

Medidas de tendencia central

Actividad 2

1. **Lean lo siguiente.**

Se realizó una breve entrevista a 40 alumnos de segundo grado de secundaria. Entre las preguntas que les hicieron, había una acerca de la edad de su mamá.

Las respuestas a esta pregunta fueron las siguientes:

32	35	34	33	34	31	32	36	35	36
37	38	35	36	33	37	34	35	34	34
32	34	35	36	34	36	35	34	34	33
33	34	35	36	35	35	33	36	37	37

2. **Completen la tabla de frecuencias y respondan las preguntas posteriores.**

Tabla de frecuencias	
Dato (edad)	**Frecuencia**
31	1
32	3
33	
34	
35	
36	
37	
38	
Total	$n = 40$

a) ¿Cuál es la edad con mayor frecuencia? __________

b) Estimen el promedio de las edades. __________

3. **Ordenen de menor a mayor los 40 datos iniciales.**

4. **Respondan las preguntas con base en los datos que ordenaron.**

a) ¿Qué datos están en el centro? __________

b) ¿Cuál es el promedio de dichos datos? __________

5. **Intercambien la información de su tabla, sus respuestas y sus procedimientos anteriores.**

Y tú, ¿qué harías?

¿Has pensado por qué una moda se convierte como tal entre los miembros de un sector social? Por ejemplo, en tu colegio puede estar de moda alguna canción, el corte de cabello de un personaje famoso, etc. Por ello, es importante que identifiques los aspectos de una moda durante alguna época. Te invitamos a que compartas con tus compañeros tu hipótesis y explicaciones al respecto.

InfórMate

Medidas de tendencia central

El propósito de estas medidas es indicar el centro en torno al cual se distribuyen los datos y pueden emplearse para representarlos. Las medidas más comunes son:

- Media aritmética o promedio
- Mediana
- Moda

Media aritmética o promedio

Esta medida resulta de dividir la suma de todos los datos entre el número total de éstos. Se representa por $\overline{x}$. También se le conoce como media o promedio.

Es decir, si se tienen n datos representados por x_1, x_2, … y x_n, entonces la media es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Mediana

Es el valor central del conjunto de datos ordenados de forma creciente o decreciente. Si el número de datos es impar, se obtendrá un único valor central; de lo contrario, se tendrán dos valores centrales y la mediana será el promedio de ambos. La mediana se representa por $\widetilde{x}$.

Moda

Es la medida que expresa el dato de mayor frecuencia. Se representa por $\hat{x}$. Pueden ocurrir los siguientes casos:

- Amodal. Cuando no hay datos que se repitan.
- Unimodal. Cuando sólo aparece una moda.
- Bimodal. Cuando resultan dos datos con la misma frecuencia mayor.
- Multimodal. Cuando tres o más datos tienen la misma frecuencia mayor.

Ejemplo:

Los siguientes datos muestran el tiempo en minutos que tardó cada uno de 10 alumnos en contestar completamente un examen de matemáticas.

50	48	53	42	35	40	46	42	50	56

Media: para calcular la media se hace lo siguiente:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{50+46+53+42+35+40+46+42+52+56}{10} = 46.2$$

Mediana: para estimar la mediana ordenamos los datos de forma creciente:

35	40	42	42	46	48	50	50	53	56

Los datos centrales son 46 y 48, así que la mediana se derivará del promedio de ellos:

$$\tilde{x} = \frac{46+48}{2} = 47$$

Moda: para determinar la moda basta contar la cantidad de veces que se repite cada dato. Los datos 42 y 50 se repiten dos veces, así que el conjunto resulta ser bimodal y los valores modales son:

$$\hat{x} = 42 \quad \text{y} \quad \hat{x} = 50$$

Al elegir una medida de tendencia central para representar un conjunto de datos, y así efectuar el análisis pertinente, debes tomar en cuenta lo siguiente:

- La media aritmética es influida por cada dato del conjunto y es única. El inconveniente se presenta cuando mientras menos homogéneos sean estos datos, resulta menos representativa a los datos de dicho conjunto.
- La mediana no se afecta al cambiar los datos mayor y menor del conjunto, ni tampoco por la homogeneidad de los mismos. Cuando los datos son más heterogéneos resulta más útil que la media aritmética.
- La moda, aunque es sencilla de calcular y se puede interpretar con facilidad, se prefiere su uso en variables cualitativas. El inconveniente aparece cuando los datos presentan más de una moda.

Glosario

Datos homogéneos. Son datos semejantes entre sí.

Datos heterogéneos. Se refieren a los datos que difieren entre sí.

Por ejemplo, los datos 195, 194, 193, 195 y 195 son homogéneos, mientras que los datos 195, 210, 190, 192 y 207 son heterogéneos.

Actividad 3

1. **Pregunten a todos sus compañeros de grupo cuántas personas viven con cada quien. Anoten sus respuestas a continuación.**

2. **Copien la siguiente tabla en su cuaderno, en caso de que les haga falta espacio, y complétenla con los datos recabados.**

Cantidad de personas que viven en tu casa	Frecuencia
	$n =$

3. **Encuentren la media, la mediana y la moda. Escriban sus cálculos en el espacio correspondiente.**

   a) ¿Cuál es la media?

   b) ¿Cuál es el valor de la mediana?

   c) ¿Cuál es el valor de la moda?

4. **Intercambien sus respuestas anteriores y expliquen cómo las obtuvieron.**

5. **Respondan la siguiente pregunta y argumenten cómo la resolvieron. Pidan apoyo a su docente para corroborar sus argumentos.**

   a) ¿Cuál de las tres medidas elegirían para representar la cantidad de individuos que viven en casa de sus compañeros? ______

Actividad 4

1. **Determinen para cada uno de los siguientes conjuntos de datos o tablas las tres medidas de tendencia central y respondan las preguntas.**

   a) A una clase de natación asisten personas de las siguientes edades: 27, 22, 29, 27, 82, 20, 28, 29 y 70 años.

   - $\bar{x} =$
   - $\tilde{x} =$
   - $\hat{x} =$
   - ¿Cuál de las medidas de tendencia central representa de mejor forma la edad que tienen las personas que asisten a esa clase? Argumenten su respuesta.

b) La siguiente tabla muestra la población que habla alguna lengua indígena en diferentes estados de la República, según datos del INEGI.

Estado	Población de habla indígena por cada 1 000 habitantes
Campeche	120
Chiapas	270
Durango	20
Guanajuato	3
Hidalgo	150
Michoacán	30
Tamaulipas	10
Querétaro	10
San Luis Potosí	100
Sinaloa	10
Tabasco	30
Veracruz	90
Yucatán	300
Zacatecas	4

Fuente: SEP, Desafíos matemáticos sexto grado. Libro de alumno,disponible en https://bit.ly/2JNzA-jT (Consulta: 15 de junio de 2018).

- $\bar{x} =$
- $\tilde{x} =$
- $\hat{x} =$

- ¿Cuál de las medidas elegirían para representar a la población de habla indígena de tales entidades? ______
- Escriban, a continuación, su argumento de por qué esa medida de tendencia central representa mejor al conjunto de datos. ______

Relaciona

En *Formación Cívica y Ética* de segundo grado, aprendiste a valorar los grupos sociales y culturales en la conformación de tu identidad. Ahora consulta la información del INEGI para aprender más sobre ellos.

c) La siguiente tabla muestra el porcentaje de población infantil que trabaja en 14 estados de la República respecto a su población total.

Estado	Porcentaje de población infantil que trabaja
Aguascalientes	10
Baja California	8
Chihuahua	8
CDMX	6
Estado de México	8
Guerrero	20
Michoacán	18
Nayarit	17
Oaxaca	17
Puebla	17
Quintana Roo	17
Sonora	7
Tabasco	17
Zacatecas	18

Fuente: SEP, Desafíos matemáticos sexto grado. Libro de alumno, disponible en https://bit.ly/2JNzA-jT (Consulta: 15 de junio de 2018).

PARA TIC

En el siguiente enlace encontrarás un ejemplo de aplicación de las medidas de tendencia central.

https://bit.ly/2t9nmsf

(Consulta: 29 de marzo de 2018).

- $\bar{x} =$
- $\tilde{x} =$
- $\hat{x} =$

- ¿Qué medida escogerían para significar el porcentaje de población infantil que trabaja en esas entidades? ______
- Escriban, enseguida, su argumento de por qué esa medida de tendencia central representa mejor al conjunto de datos. ______

2. **Discutan con sus compañeros los argumentos que dieron en cada uno de los incisos anteriores y efectúen un breve debate acerca de ellos.**

El rango y la desviación media

Actividad 5

1. **Lean la siguiente información y hagan lo que se pide.**

Se preguntó a 5 alumnos de dos grupos diferentes de segundo año acerca de la cantidad de dinero en pesos que gastan a la semana en la escuela.

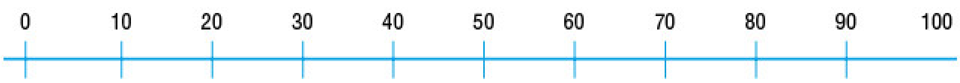
	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Grupo 2o. A	10	90	70	50	30
Grupo 2o. B	45	50	10	90	55

a) Calculen el rango (r) de cada uno de los dos grupos anteriores.

- Rango del conjunto A: ____________________
- Rango del conjunto B: ____________________

b) Signifiquen los valores mediante puntos en cada uno de los siguientes ejes.

Conjunto A



Conjunto B

c) ¿En cuál de los conjuntos hay mayor separación entre los puntos, es decir, es más heterogéneo o disperso? ____________________

____

d) Calculen la media aritmética de cada uno de los dos conjuntos de datos.

- Para el conjunto A: $\bar{x}$ =
- Para el conjunto B: $\bar{x}$ =

e) Completen las siguientes tablas con la distancia que hay entre cada dato y su media ($\bar{x}$) correspondientes a cada conjunto.

Relaciona

Ya en el curso anterior de *Matemáticas* trabajaste el rango de un conjunto de datos; ahora nos servirá para dar pie a otra herramienta de análisis de datos.

Tabla para el conjunto A	
Dato (x)	Distancia entre el dato y su media
10	40
90	
70	
50	
30	

Tabla para el conjunto B	
Dato (x)	Distancia entre el dato y su media
45	
50	
10	40
90	
55	

De interés

¿Te gusta la música? ¿Te interesa aprender a tocar un instrumento o especializarte en canto? Pues para ello es necesario leer partituras, y sí, ¡saber matemáticas básicas! Ya que éstas se basan en valores matemáticos para la armonía, e incluso, hay un género musical basado en ellas, el *mathrock*.

f) Encuentren el promedio de las distancias entre cada dato y su media para cada conjunto, A y B.

- Promedio para el conjunto A:
- Promedio para el conjunto B:
- De los conjuntos A y B, ¿cuál tuvo un menor promedio de las distancias entre cada dato y su media? ____________________

2. Respondan lo siguiente.

a) Con base en los incisos anteriores, el conjunto que fue más heterogéneo (A o B), ¿presenta un menor o mayor promedio de las distancias entre cada dato y su media? ____________________

3. Completen con "homogéneo" o "heterogéneo" las siguientes oraciones.

a) Un conjunto de datos que tiene un menor promedio de las distancias entre cada dato y su media es ____________, pues sus datos están menos dispersos.

b) Un conjunto de datos que tiene un mayor promedio de las distancias entre cada dato y su media es ____________, pues sus datos están más dispersos.

4. Intercambien sus respuestas y expliquen sus argumentos que los llevaron a ellas.

a) Pidan apoyo a su docente para corregir o verificar sus respuestas.

InfórMate

Las medidas de tendencia central presentan limitaciones para describir el comportamiento de un conjunto de datos, ya que un conjunto homogéneo y uno heterogéneo o disperso pueden tener la misma media aritmética aunque sean totalmente diferentes.

Ejemplo:

El conjunto de datos homogéneo {4, 5, 5, 6} tiene media igual a 5; por otro lado, el conjunto disperso {2, 2, 4, 12} también tiene media igual a 5. Pero la dispersión no se puede conocer sólo a partir del promedio. Además, la media no parece ser representativa cuando el conjunto es disperso.

Entonces, para conocer en qué grado los datos de un conjunto son o no dispersos, se estudian las medidas de dispersión que se enuncian a continuación.

Medidas de dispersión

Estas medidas estadísticas son de utilidad para determinar el grado de separación de los datos del conjunto. Las medidas de dispersión más usadas son:

- El rango
- La desviación media
- La desviación estándar
- La varianza

En este curso, nos enfocaremos solamente a los dos primeros.

Rango

Medida que representa la diferencia entre el dato mayor y el dato menor de un conjunto de datos. Se simboliza como r.

Desviación media

Medida que indica el promedio de las distancias entre cada dato de un conjunto respecto de su media aritmética. Por tanto, esta medida es un indicador de qué tan alejados están los datos respecto a la media aritmética. Se simboliza como DM y se calcula mediante la relación:

$$DM = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \cdots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

En donde n indica la cantidad de datos del conjunto; x_1, x_2, …, y x_n corresponden a los datos, y $\overline{x}$ es la media aritmética de dichos datos.

Mientras más cercana a cero resulta la DM significa que los datos están menos dispersos; por otro lado, mientras más grande o alejado de cero sea este valor, mayor resulta el grado de dispersión de los datos.

De interés

Actualmente,muchos deportes usan las matemáticas y las ciencias para medir resultados de sus jugadores y proponer nuevos entrenamientos y estrategias para ser mejores competidores, ¿alguien duda que las matemáticas están presentes en todos lados?

Ejemplo:

A continuación, determinaremos el rango y la desviación media de los puntajes obtenidos por 9 jugadores después de su partido de básquetbol.

Jugador	Puntaje
No. 1	15
No. 2	38
No. 3	0
No. 4	2
No. 5	8
No. 6	4
No. 7	5
No. 8	8
No. 9	10

Para ello, hacemos lo siguiente.

Estimamos el rango:

$$r = 38 - 0 = 38$$

Luego, para calcular la *DM*, primero calculamos el promedio de los puntajes.

$$\overline{x} = \frac{15+38+0+2+8+4+5+8+10}{9} = 10$$

Enseguida, obtenemos los valores absolutos de las diferencias de cada dato respecto del promedio.

Jugador	Puntaje (x)	$\lvert x-\overline{x}\rvert$
No. 1	15	$\lvert 15-10\rvert = 5$
No. 2	38	$\lvert 38-10\rvert = 28$
No. 3	0	$\lvert 0-10\rvert = 10$
No. 4	2	$\lvert 2-10\rvert = 8$
No. 5	8	$\lvert 8-10\rvert = 2$
No. 6	4	$\lvert 4-10\rvert = 6$
No. 7	5	$\lvert 5-10\rvert = 5$
No. 8	8	$\lvert 8-10\rvert = 2$
No. 9	10	$\lvert 10-10\rvert = 0$

Después, determinamos el promedio de estos valores absolutos, lo que nos dará la *DM*:

$$DM = \frac{\lvert x_1-\overline{x}\rvert + \lvert x_2-\overline{x}\rvert + \cdots + \lvert x_n-\overline{x}\rvert}{n} = \frac{5+28+10+8+2+6+5+2+0}{9} = 7.\overline{3}$$

El valor de la $DM = 7.333$ se aleja de cero. Por tal razón, se afirma que los datos están dispersos, es decir, es un conjunto de datos heterogéneo. Esto se puede ver al analizar la tabla y observar que existen datos extremos, como el 38 que se aleja mucho de los otros valores.

Por tanto, cuando mientras mayor sea la desviación media, mayor será el grado de heterogeneidad de los datos, por lo que la media aritmética pierde precisión al considerarla como la medida que representa al conjunto; por el contrario, si se tiene una desviación cercana a cero, esto indica que la media aritmética representa al conjunto de datos, pues son más homogéneos.

La desviación media (*DM*) tiene diversas aplicaciones, por ejemplo:

- Para el control estadístico de la calidad de una empresa.
- En la determinación de la esperanza de vida de objetos o personas.
- En la exactitud y errores de las mediciones, entre otras.

Ejemplo:

Considerando esta última aplicación, si se realizan diversas mediciones a un mismo objeto es muy probable que entre dichas mediciones resulten cantidades diferentes, ya sea por décimas o centésimas.

De tal manera, se puede acordar que:

- Si el error en una medición es insignificante, entonces se hizo una medición exacta.
- Si el error en una medición es de consideración, entonces se efectuó una medición inexacta.

Por tanto, la exactitud de la medición de un objeto está en relación con la desviación media de cada medición hecha al objeto, es decir, a mayor desviación media, más inexacto o ineficaz resulta el instrumento o medición del objeto.

PARA TI©

En el siguiente enlace encontrarás varios métodos para calcular la altura de un objeto.

https://bit.ly/2MgiVUC

(Consulta: 11 de junio de 2018).

Actividad 6

1. **Midan el tiempo en segundos que tarda cada uno de sus compañeros de equipo en correr 50 m (o la distancia que su profesor les indique).**

   a) **Método 1.** Usen un reloj analógico con segundero para realizar las mediciones.

   Escriban sus resultados en la tabla siguiente.

Integrante del equipo	Tiempo (s) medido con un reloj analógico
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- Calculen la desviación media de los datos obtenidos.

b) **Método 2.** Usen un reloj digital o un cronómetro digital.

Escriban sus resultados en la tabla.

Anoten sus resultados:

Miembro del equipo	Tiempo (s) medido con un reloj digital
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- Calculen la desviación media de los datos obtenidos.

De interés

En 2013 se cumplieron 300 años de la edición del libro *Ars Conjectandi*, obra póstuma de Jacob Bernoulli (1654-1705), en la que se presenta un resultado llamado la ley débil de los grandes números, el cual sentó las bases de lo que hoy conocemos como estadística frecuentista.

2. Respondan las preguntas.

a) ¿Cuál de las desviaciones medias de cada método de medición resultó menor?

b) ¿Cuál es el método que muestra mediciones más exactas?

3. Intercambien sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron. Expliquen la manera como abordaron cada método.

Actividad 7

1. Lean y respondan lo que se pide en cada situación.

a) Uno de los estándares de calidad de una empresa empacadora indica que cada lata de salmón debe cumplir los requisitos de contenido y peso. Por tanto, al pesar 10 latas de salmón elegidas al azar de una caja con más de 100 latas, la desviación media de los pesos debe ser de máximo 4.5. Después de realizar los pesajes a las 10 latas de salmón de una caja, se obtuvieron los siguientes pesos en gramos.

245, 240, 236, 238, 240, 250, 237, 238, 232 y 243

- ¿Se cumple con el requisito de la desviación media?, ¿por qué? ______________________________

- ¿En qué beneficia al consumidor el hecho de que un producto cumpla con estándares de calidad como el anterior? ______________________________

b) Los siguientes datos representan los puntajes que manifestaron 10 pacientes en una prueba de agudeza visual.

19, 16, 13, 31, 25, 12, 15, 24, 39 y 23

- Calculen la media aritmética.

- Determinen la desviación media de este conjunto de datos.

- ¿Qué indica la desviación media respecto a la agudeza visual de esos pacientes? ______________________________

2. Muestren sus resultados obtenidos de la *DM*.

3. Escriban cinco situaciones en las que se puede aplicar el cálculo de la desviación media.

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

e) ______________________________

Pausa en el camino

Actividad 8

1. **Analicen los siguientes problemas y respondan.**

   a) Se han revisado los índices de robos de bicicletas en dos poblaciones distintas: El Paraíso y El Edén. Después de estudiar los datos se obtuvieron las siguientes conclusiones:

   En El Paraíso, la media aritmética es de 25; la mediana, de 20 y la moda, de 15.

   En El Edén, la media aritmética es de 25; la mediana, de 30 y la moda, de 35.

   - ¿En cuál de las dos poblaciones cuidarían más su bicicleta? ¿Por qué? ______

   b) La siguiente tabla muestra el resultado de una encuesta a 12 familias respecto al número de hijos que tienen.

Familia encuestada	Número de hijos
Familia 1	2
Familia 2	12
Familia 3	2
Familia 4	4
Familia 5	5
Familia 6	6
Familia 7	7
Familia 8	8
Familia 9	9
Familia 10	10
Familia 11	11
Familia 12	12

   - Calculen las medidas de tendencia central.

   - ¿Cuál de las medidas anteriores es la que más representa al número de hijos de estas familias? Argumenten su respuesta. ______

c) La siguiente tabla expone el resultado de una encuesta a 12 familias acerca de su consumo semanal de litros de leche.

Familia encuestada	Litros de leche
Familia 1	3
Familia 2	28
Familia 3	7
Familia 4	5
Familia 5	8
Familia 6	8
Familia 7	3
Familia 8	6
Familia 9	3
Familia 10	3
Familia 11	10
Familia 12	15

- Calculen las medidas de tendencia central.

$\bar{x} =$

$\tilde{x} =$

$\hat{x} =$

- ¿Cuál de las medidas anteriores es la que más representa la cantidad de leche consumida a la semana por estas familias? Argumenten su respuesta.

2. **Verifiquen con sus demás compañeros los resultados obtenidos y, con apoyo de su docente, elaboren una conclusión respecto a la dispersión de los datos.**

Eje: Análisis de datos
Tema: Probabilidad

Le apuesto a ganar

Aprendizaje esperado: Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Inicio del camino

Actividad 1

1. **Lean la siguiente situación.**

   Lucía propone a sus compañeros un juego de azar con el uso de un dado y una moneda común. Este juego consiste en lanzar tanto el dado como la moneda y observar el número que muestra el dado y el lado que sale en la moneda (águila o sol), en su cara superior, respectivamente.

   Existen tres variantes del juego:

   Juego A. El jugador gana si al lanzar ambos objetos el dado muestra un número par y la moneda, "águila". De lo contrario, pierde.

   Juego B. El jugador gana si al lanzar ambos objetos en el dado sale un número impar y en la moneda, "sol". De lo contrario, pierde.

   Juego C. El jugador gana si al lanzar ambos objetos el dado muestra un número mayor a dos y la moneda, "águila". De lo contrario, pierde.

Relaciona

Recuerda que en tu curso anterior de *Matemáticas* realizaste experimentos aleatorios. Aprovecha esto para la comprensión de esta lección.

2. **Respondan las preguntas.**

   a) ¿Cuál de los tres juegos preferirían jugar porque les puede ofrecer más posibilidades para ganar? ______________________

   b) Argumenten su respuesta. ______________________

3. **Escriban dos juegos de azar que puedan realizarse lanzando sólo un dado, pero de forma que en ambos juegos el jugador tenga la misma oportunidad de ganar que de perder. Luego respondan.**

   Juego 1: ______________________

   Juego 2: ______________________

   a) ¿Cómo aseguran que en sus juegos el jugador tiene la misma posibilidad de ganar que de perder?

4. **Comparen sus resultados con los de las demás parejas.**

Ruta del saber

Probabilidad teórica

Actividad 2

1. Respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es un experimento aleatorio? ______

b) ¿Qué es un experimento determinista? ______

2. Intercambien sus respuestas anteriores y pidan ayuda a su docente para corroborarlas.

3. Escriban tres experimentos aleatorios y tres experimentos deterministas.

Experimentos aleatorios	Experimentos deterministas

De interés

El estudio de la probabilidad se realiza cuando no podemos predecir con toda certeza un resultado. Por ejemplo, en los juegos de azar donde no sabemos qué resultado se obtendrá.

Actividad 3

1. Lean la información que se presenta a continuación y luego, respondan las preguntas.

La siguiente tabla registra los resultados del experimento de lanzar una moneda legal en 250 ocasiones.

Evento	Probabilidad del evento		
	Fracción	Decimal	Porcentaje
Cae águila	$\frac{100}{250} = \frac{2}{5}$	0.4	40%

a) ¿En cuántos volados del experimento se obtuvo águila? ______

b) ¿En cuántos volados cayó sol? ______

c) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que caiga sol?

______

Glosario

Moneda legal. Se refiere a una moneda cuya probabilidad de que caiga sol o águila es la misma.

2. Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

3. Discutan, con la guía de su docente, acerca del número de águilas y de soles obtenidos si la moneda se lanzara 1 000 veces más.

a) ¿La proporción se conservaría? Es decir, ¿será cierto que de 1 000 lanzamientos, 400 serían águila y 600, soles?

b) ¿Qué ocurre con la cantidad de águilas y de soles conforme aumenta el número de lanzamientos?

InfórMate

La probabilidad frecuencial se basa en los datos obtenidos al repetir un experimento bajo las mismas condiciones, una gran cantidad de veces. Esto ayuda a comprender el experimento, dado que éste es aleatorio y, por tanto, impredecible.

Recuerda que la probabilidad frecuencial $P(A)$ de un evento A, se calcula mediante la razón:

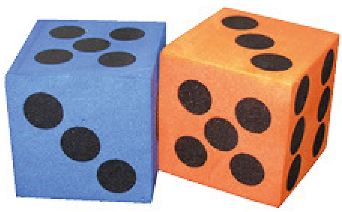
$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables en el experimento}}{\text{Número total de veces que se realizó el experimento}}$$

Y se puede representar en forma de fracción, decimal o porcentaje.

Actividad 4

1. **Lee cada experimento y contesta lo que se pide.**

   a) El experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados distintos. Luego, se anota en una tabla lo obtenido en las caras superiores en cada lanzamiento con la siguiente nomenclatura: (3, 1), la cual indica que en el primer dado salió 3 y en el segundo, 1.



- Completa la tabla.

Dado anaranjado / Dado azul	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- ¿Cuántos resultados diferentes se pueden conseguir? ____________________

b) Ahora, considera el experimento de lanzar los dos dados y sumar los valores que salgan en las caras superiores.

- Completa la siguiente tabla con los resultados de este experimento.

Dado anaranjado / Dado azul	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Escribe el conjunto de todos los posibles valores generados en el experimento.

E = {2, 3, ______________________________}

- ¿Cuántos elementos tiene? ______________________________

- ¿De cuántas maneras se pueden obtener los elementos del espacio muestral?

2. Responde lo siguiente considerando la tabla anterior.

a) Determina todos los resultados posibles del evento cuya suma de los lados que salgan sea un número impar.

Evento: que la suma sea impar {3, ____________________}

b) ¿Cuántos posibles resultados tiene el evento? ______________________________

c) ¿De cuántas maneras se pueden obtener los elementos que pertenecen al evento? Anota las parejas de números que generan estos resultados.

3. Comparen sus respuestas anteriores y expliquen cómo las obtuvieron.

a) Conserven sus resultados, pues los usarán en las actividades siguientes.

Actividad 5

1. **Lean los siguientes juegos de azar con dos dados.**
   - Juego A. Si al lanzar los dos dados y sumar las caras superiores obtienen un resultado menor o igual a 6, ganan $2, de lo contrario pagan $2.
   - Juego B. Si al tirar los dos dados y sumar las caras superiores consiguen un resultado mayor o igual a 8, ganan $2, de lo contrario pagan $2.
   - Juego C. Si al echar los dos dados y sumar las caras superiores logran un resultado mayor o igual a 7, ganan $2, de lo contrario pagan $2.

Glosario

Juego de azar. Tipo de juego en el que las posibilidades de ganar o perder dependen del azar o suerte y del jugador. Se incluyen aquí las apuestas tragamonedas, el tris, la lotería, etc.

2. **Respondan las preguntas con base en dichos juegos. También, consideren las respuestas de la actividad anterior.**
   a) ¿Qué juego elegirían jugar?, ¿por qué? ______________________

   b) ¿En algunos de los juegos tendrán la misma oportunidad de ganar? Justifiquen su respuesta. ______________________

   c) En el juego B, ¿con cuáles combinaciones de los dados pueden ganar? ______________________

   d) En el juego C, ¿cuáles son las combinaciones de los dados con las que pueden perder? ______________________

Y tú, ¿qué harías?

Los juegos de azar han crecido en popularidad y en esta década continúa su aumento. Existen diferentes razones por la que la gente elige jugar estos juegos, pero para algunas personas puede convertirse en un problema serio, como una adicción. ¿Consideras que es importante jugarlos con moderación? ¿Cómo identificarías que haz jugado suficiente y debes detenerte en un juego de azar?

3. **Consideren otro juego, en el que ganan $2 si la suma de las caras superiores de los dados es mayor o igual a 1 y pierden $2 en caso contrario.**
   a) ¿Cuál es el experimento y evento A con el que ganan en el juego de dados?

      Experimento: ______________________

      A: ______________________

   b) Escriban todos los posibles resultados del juego. Es decir, anoten los posibles resultados del experimento.

   c) ¿Cuántos son los resultados favorables para el evento A, es decir, con cuántos de los posibles resultados ganan? ______________________

   d) ¿Qué fracción se genera al tomar en cuenta los resultados favorables para el evento A respecto del total de los resultados?

4. **Muestren las respuestas que su equipo formuló y compárenlas con las que los otros equipos propusieron.**

5. **Contesten las preguntas.**

a) ¿De qué depende que prefieran jugar un juego en vez de otro?
b) En el último juego, ¿hay manera de perder?
c) Propongan un juego justo, es decir, donde haya la misma posibilidad de ganar que de perder.

InfórMate

Se denomina probabilidad teórica o clásica, $P(A)$, de un evento A al cociente:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento}}{\text{Número total de resultados posibles a todos los eventos}}$$

Para determinar la probabilidad clásica se debe conocer la cantidad de resultados totales de un experimento y cuántos de ellos son favorables para un evento.

Ejemplo:

El experimento consiste en lanzar un dado legal.

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 3 al lanzar una vez un dado?

Su espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

lo que nos da un total de 6 resultados posibles.

El evento A se define como:

A: Obtener un número mayor o igual a 3.

Los resultados o casos favorables son {3, 4, 5, 6}, es decir, 4 resultados favorables.

Por tanto, la probabilidad de este evento es la razón:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento}}{\text{Número total de resultados posibles a todos los eventos}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.\overline{6}$$

Visto como porcentaje es $P(A) = 0.6666 \times 100 = 66.66\%$.

Cuando se tiene la misma cantidad de eventos favorables que la del total de eventos, se conoce como evento seguro y su probabilidad es igual a 1.

Ejemplo:

En el mismo experimento de lanzar un dado y observar el resultado de su cara superior, el evento A consiste en obtener un número menor a 7, entonces la probabilidad de A se calcula como:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento}}{\text{Número total de resultados posibles a todos los eventos}} = \frac{6}{6} = 1$$

Un evento imposible no tiene resultados favorables y su probabilidad es igual a 0.

Relaciona

En *Geografía* de primer grado de secundaria aprendiste sobre riesgos y desastres naturales. ¿Sabías que la probabilidad se utiliza para saber cuándo ocurrirán?

Ejemplo:

En el mismo experimento del lanzamiento del dado, se define el evento A como obtener un número menor a 1. La probabilidad de A es:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento}}{\text{Número total de resultados posibles a todos los eventos}} = \frac{0}{6} = 0$$

Esto indica que si la probabilidad de un evento se aproxima a 1, entonces es un evento muy probable; pero si la probabilidad se acerca a 0, entonces es un evento poco probable.

Actividad 6

1. Lean la siguiente información y respondan lo que se pide.

El experimento consiste en lanzar un dado blanco y uno azul. Si denotamos por parejas (dado azul, dado blanco) las posibles observaciones, su espacio muestral es el siguiente:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

PARA TIC

Entra a la siguiente liga para jugar y aprender sobre probabilidad, experimentos aleatorios y su relación con las matemáticas.

https://bit.ly/2l3wofd

(Consulta: 15 de junio de 2018).

a) Marquen en el espacio muestral, con distintos colores, los eventos siguientes.

A: Las caras superiores suman 3.

B: Las caras expuestas tienen una suma mayor o igual a 10.

C: Las caras mostradas cuya suma es mayor a 10.

D: La suma de las caras que salieron es un número impar.

E: La cara que cayó en el dado azul es par.

F: Las caras superiores muestran números iguales.

b) Completen la tabla con lo que se solicita.

Evento	Resultados posibles	Probabilidad del evento	Probabilidad en decimal	Probabilidad en porcentaje
A				
B				
C				
D				
E				
F				

2. **Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron. Corrijan si es necesario.**

Respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál evento es más probable? ______

b) Propongan un evento imposible. ______

c) Propongan un evento cuya probabilidad sea $\frac{1}{2}$. ______

Actividad 7

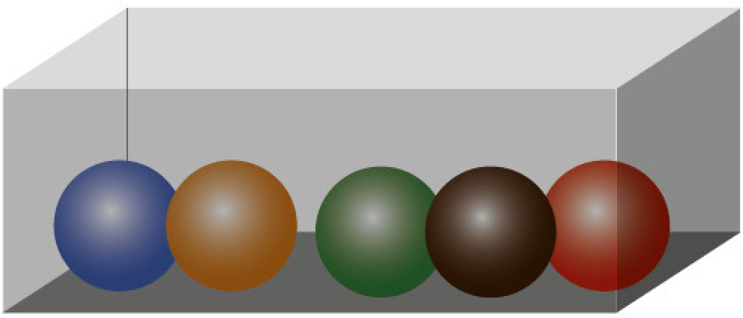
1. **Determinen lo que se les pide en cada inciso.**

a) Raúl tiene en su bolsillo dos monedas de \$5 y dos monedas de \$10. Sin ver ni sentir de qué moneda se trata, saca una moneda y observa su denominación. Luego, la vuelve a meter a su bolsillo y vuelve a realizar la misma operación una vez más.

- Escriban el espacio muestral de dicho experimento.

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya sacado dos monedas de \$5? ______
- ¿Cuál es la probabilidad, en porcentaje, de que haya sacado monedas de diferente denominación? ______

b) En una caja, hay una pelota negra, una amarilla, una roja, una verde y una azul. Se establece el experimento aleatorio como extraer una pelota y observar su color.



- ¿Cuál es la probabilidad, en decimal, de extraer una pelota de color verde? ______
- ¿Algún color tiene una mayor probabilidad de ser extraído? Expliquen su respuesta. ______

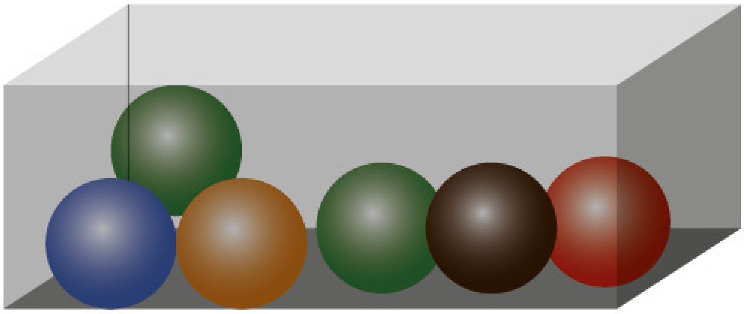
PARA TIC

En el siguiente enlace podrás consultar ejemplos didácticos de probabilidad teórica o clásica:

https://bit.ly/2HNysro

(Consulta: 13 de junio de 2018).

c) En una caja, hay dos pelotas de color verde y sólo una azul, una amarilla, una roja y una negra y se extrae una pelota al azar.



- ¿Cuál es la probabilidad, en fracción, de sacar una pelota verde? ______
- ¿Algún color tiene una mayor probabilidad de ser extraído? Expliquen su respuesta. ______

d) En un aula de clases, hay 12 niños y 13 niñas y se selecciona a un estudiante al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una niña? ______

e) En un salón hay 30 alumnos, de los cuáles 18 son mujeres y el resto hombres, de los cuales se eligirá al azar a un alumno para que asista a la conferencia de un famoso investigador que se presentará en la universidad del estado.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una alumna?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a un alumno?
- Si se suman las dos probabilidades anteriores, ¿cuál es el resultado?
- ¿A qué crees que se deba el resultado anterior? ______

f) En una rifa, participan 1 000 boletos y sólo hay un boleto ganador.

- ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se compraron cinco boletos? ______
- ¿Cuántos boletos se deben comprar para tener una probabilidad de ganar del 25%? ______

g) Se lanza una moneda 3 veces y se observa qué lado cae.

- Determinen su espacio muestral.

- ¿Qué probabilidad existe de que en el primer y tercer tiros caiga águila? ______

- ¿Cuál es la probabilidad de que todas las monedas caigan en sol? ______

2. Comparen sus respuestas con las de sus demás compañeros y corrijan las que no sean correctas.

3. Calculen las siguientes probabilidades con base en los incisos anteriores: b), c) y e). Pidan apoyo a su docente.

a) En el caso de la caja que contiene una pelota azul, una roja, una verde, una negra y una amarilla, ¿cuál es la probabilidad de extraer una roja o una verde? ______

b) En el inciso que trata sobre la caja donde hay una pelota azul, una roja, dos verdes, una negra y una amarilla, si el experimento cambia y se sacan dos pelotas de manera consecutiva, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean verdes? ______

c) En el caso acerca de la canasta de frutas, ¿cuál es la probabilidad de extraer una manzana o una pera? ______

Actividad 8

1. Expresa, de forma porcentual, cada una de las probabilidades que se te solicitan a continuación en cada inciso.

a) Mariana juega basquetbol de forma constante y le gusta llevar a cabo un registro de sus avances y estadísticas. Sus números actuales son constantes; esto se observa en la siguiente tabla:

Tipo de lanzamiento	Cantidad de lanzamientos	Encestes
Tiro libre	100	88
Tiro de tres puntos	50	35

- ¿Cuál es su probabilidad de encestar un tiro libre en su próximo partido? ______

- ¿Cuál es la probabilidad de que Mariana falle un tiro de 3 puntos? ______

b) De acuerdo con la siguiente imagen que representa una ruleta responde las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta, la pelotita quede en un casillero azul? ______________________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que al girar, la pelotita quede en un casillero gris? ______________________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que al girar, la pelotita quede en un casillero blanco? ______________________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que al girar, la pelotita caiga en un casillero naranja? ______________________________
- ¿Cuál es el valor que tiene más probabilidad de ocurrir? ¿Por qué? ______________________________

2. Den a conocer sus respuestas a sus demás compañeros y corrijan las operaciones donde sea necesario.

Probabilidad teórica frente a probabilidad frecuencial

Actividad 9

1. Consigan lo siguiente.

- 5 canicas verdes
- 4 canicas azules
- 3 canicas rojas
- 1 caja o bolsa no transparente

2. Revuelvan las canicas en la caja o bolsa y consideren el experimento de sacar una canica de la caja sin mirar. Respondan las preguntas.

a) El espacio muestral tiene ____________ elementos.

b) La probabilidad teórica indica que la oportunidad de obtener una canica de color verde es: ____________

3. **Resuelvan el inciso anterior mediante la probabilidad frecuencial. Para ello, apóyense en los siguientes pasos.**

a) Cada integrante del equipo extrae una canica; anota en la tabla el color que salió y regresa la canica a la bolsa, esto en 10 ocasiones.

Integrante	Color de canica en cada una de las 10 extracciones (v = verde, a = azul, r = rojo)										Número de veces que se extrajo una canica verde
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1											
2											
3											
4											
5											

Número total de extracciones hechas por todos los integrantes del equipo.	Número total de veces que se extrajo una canica verde.

b) Con base en el número total de lanzamientos realizados por los integrantes del equipo y registrados en la tabla anterior, ¿cuántas veces se sacó una canica de color verde? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de extraer de la bolsa una canica verde?

d) Comparen la probabilidad frecuencial de este evento con su probabilidad teórica calculada anteriormente, ¿son el mismo valor o muy cercanos? ____________

4. **Respondan de acuerdo con lo que se les pide.**

a) Completen la siguiente tabla con los datos que recabaron los diferentes equipos en el inciso anterior.

Equipo #	Número total de extracciones	Número total de veces que se extrajo una canica verde
Totales		

b) Determinen la probabilidad frecuencial de sacar una canica verde, con base en los datos de la tabla anterior. ______

c) Comparen la probabilidad frecuencial obtenida para este evento al realizar el cálculo con los datos del equipo con la probabilidad frecuencial obtenida con los datos del grupo, ¿consideran que la probabilidad frecuencial se acerca a la probabilidad teórica?

d) ¿Cuál de las probabilidades frecuenciales obtenidas, la de equipo o la de grupo, resultó más cercana a la probabilidad teórica para el mismo evento? ______

InfórMate

La probabilidad teórica nos otorga una medida respecto a la posibilidad de ocurrencia de un evento incluso antes de realizarse, mientras que la probabilidad frecuencial requiere que el experimento ya haya sucedido para darnos esa misma medida, por tanto, esta última depende de los resultados obtenidos. Sin embargo, la probabilidad frecuencial de un evento se acerca a su probabilidad teórica si se efectúan muchos experimentos.

Actividad 10

1. **Consigan lo que se indica a continuación.**

- 10 cartas del mismo tamaño y numeradas del 1 al 10.
- 1 bolsa no transparente.

2. **Contesten las preguntas siguiendo los pasos que se señalan a continuación.**

a) Definamos el experimento como seleccionar al azar una de las 10 cartas y revisar el número que ésta tiene, y luego, regresar la carta a la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad clásica o teórica de que dicho número sea mayor a 6? ______

______

b) Consideren el experimento anterior y completen la tabla para determinar la probabilidad frecuencial del mismo evento.

Integrante	Carta con número mayor a 6 (S = sí, N = no)										Número de cartas en total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1											
2											
3											
4											
5											
Número total de veces que se seleccionó una carta.					Número total de veces que la carta tenía un número mayor a 6.						

c) La probabilidad frecuencial de este evento es, entonces: ______

______

d) Al comparar la probabilidad frecuencial de este evento con su probabilidad teórica calculada anteriormente, ¿piensan que la probabilidad frecuencial se acerca a la probabilidad teórica? Escriban su conclusión. ______

______

______

______

______

______

______

______

3. **Redacten, en su cuaderno, una conclusión respecto a cuándo sería óptimo usar la probabilidad teórica y cuándo la probabilidad frecuencial.**

Relaciona

En *Lengua materna. Español* aprendiste reglas de ortografía y comprensión lectora. Aprovecha esto para la comprensión de los problemas y para redactar tus conclusiones de manera clara.

Pausa en el camino

Actividad 11

1. Retomen la actividad de inicio de la lección y hagan lo que se pide en cada inciso.

a) Describan el espacio muestral del juego.

b) Representen los resultados favorables del juego *A* y respondan las preguntas.

- ¿Cuántos elementos tiene? ______
- ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$ de este tipo de juego? ______

c) Representen los resultados favorables del juego *B* y respondan las preguntas.

- ¿Cuántos elementos tiene? ______
- ¿Cuál es la probabilidad $P(B)$ de este tipo de juego? ______

d) Representen los resultados favorables del juego *C*.

- ¿Cuántos elementos tiene? ______
- ¿Cuál es la probabilidad $P(C)$ de este tipo de juego? ______

e) ¿Cuál de los tres juegos le da más posibilidad de ganar al jugador?

2. Compartan sus respuestas.

a) Comenten qué procedimiento y operaciones llevaron a cabo para responder.
b) Observen cuáles son sus errores y corrijan las operaciones donde sea debido.
c) En caso de no tener error, expliquen a otros compañeros que sí los tuvieron, cómo llegaron a ese resultado, para que eviten estos errores más adelante.

Pasos firmes

Terminaste un trimestre y es tiempo de dar pasos firmes para continuar con tu camino.

1. Contesta las preguntas del siguiente esquema.

¿Cuáles fueron mis aprendizajes?

¿Qué dificultades enfrenté para lograr mis aprendizajes?

¿Qué puedo hacer para solucionar las dificultades que enfrenté?

¿Cómo puedo utilizar mis aprendizajes en mi vida cotidiana?

Conocer para ganar: probabilidad

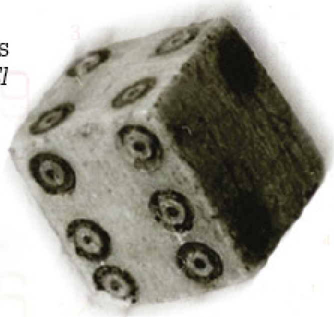
¿Te gustaría saber qué probabilidad tienes de aprobar un examen o de que la persona que te agrada y tú se hablen? Para saber esto las matemáticas se valen de la probabilidad que considera el número de casos favorables y el de casos posibles, lo cual puede serte de gran utilidad en la toma de decisiones.

Alrededor del año 2000 a.n.e., los egipcios usaban un dado de seis caras como entretenimiento, e incluso, en la mitología griega se decía que un juego con dados había provocado una pelea entre dioses, **¿qué estrategias emplearías para ganar un juego de dados?**

Cardano fue un matemático que se preguntó cómo podría incrementar su éxito en los llamados juegos de azar ya que él era aficionado a los mismos. Esto lo llevo a escribir *El libro de los juegos de azar* en 1663, el cual se convirtió en el primer tratado de la probabilidad.

¿Cómo crees que la probabilidad te ayudaría a saber cuántas veces podrás anotar un penal en una ronda de cinco tiros?

Pero fue Jacob Bernouille quien hizo aportes importantes a la probabilidad con su obra *El arte de la conjetura* que se convirtió en la base de la probabilidad actual, la cual se publicó ocho años después de su muerte. **¿Bernouille habrá calculado la probabilidad de que una obra sea publicada después de morir su autor?**



Entre 1650 y 1660, Blaise Pascal fundó la teoría de la probabilidad, esto al intentar descifrar si era posible que, tras tirar un dado 24 veces, al menos en dos ocasiones saliera el número seis, **¿cuántas veces crees que esto sea posible?**

En 1812 Laplace publicó una obra en donde proponía el uso de la probabilidad para problemas sociales, demográficos, jurídicos y astronómicos; pero fue hasta 1950 que el ruso Komogorov logró resolver un problema para poder establecer cálculos de la probabilidad y, finalmente, asentar la teoría de ésta.

Actualmente, la probabilidad se emplea para clasificar especies animales, la calidad de ciertos productos, para saber la probabilidad de que tu equipo gane o de sufrir una caída por las escaleras; además de ayudar en la probabilidad de que se presenten ciertos fenómenos naturales y así, alertar a la población y mantener medidas de seguridad. Y a ti, **¿qué te gustaría saber usando la probabilidad?**

Lee con atención y subraya la respuesta correcta y así valores tu trayecto.

1. Si se tiene un polígono regular con un perímetro de 41.5 cm, ¿de qué polígono se trata si se sabe que cada lado mide 8.3 cm?

   a) Heptágono
   b) Cuadrado
   c) Hexágono
   d) Pentágono

2. ¿Cuál es la medida de la apotema de un octágono regular si se sabe que tiene un área de 695.29 cm^2 y sus lados miden 12 cm?

   a) 15
   b) 14.48
   c) 14.3
   d) 13.98

3. Si se desea construir un contenedor de agua en forma de prisma con base cuadrada que almacene 3.38 m^3 y con una altura de 2 m, ¿de qué dimensiones deberá ser la base?

   a) 1.3 m de lado
   b) 2.6 m de lado
   c) 2.3 m de lado
   d) 1.5 m de lado

4. ¿Qué radio debe tener un cono si este debe tener una altura de 5 m y un volumen de 11.775 m^3 (usar $\pi = 3.14$)?

   a) 1 m
   b) 2.5 m
   c) 1.3 m
   d) 1.5 m

5. La siguiente gráfica representa la cantidad de kilowatts hora que consumen los integrantes de una casa durante 24 días. ¿Cuántos kilowatts consumieron aproximadamente durante estos días?

   a) 120 kWh
   b) 350 kWh
   c) 200 kWh
   d) 150 kWh

6. En la gráfica anterior, ¿qué día hubo mayor consumo de energía?

a) 15
b) 24
c) 23
d) 22

7. Se les preguntó a diez adolescentes por el número de videojuegos que tienen y las respuestas fueron: 4, 5, 7, 10, 2, 12, 2, 4, 5, 15. Calcula la media aritmética.

a) 4.5
b) 7
c) 6.6
d) 3.5

8. Angélica desea analizar la precisión de las mediciones hechas sobre el peso en gramos de una pulsera de oro. Para esto, debe calcular la desviación media de los pesos registrados: 5, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6. ¿Cuál es el valor de la desviación media?

a) 0.2
b) 0.2666
c) 0.1666
d) 1.1666

9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar, en tres ocasiones una moneda, Eunice obtenga exactamente en dos ocasiones "águila" de las caras que salgan?

a) $\frac{3}{8}$
b) 25%
c) 0.5
d) 5/8

10. ¿Cuál es la probabilidad de que Gonzalo obtenga una carta de corazón al sacar una carta al azar de un mazo de 52 cartas? Considera que una baraja consta de 13 cartas diferentes para cada una de las siguientes figuras: trébol, corazón, diamante y pino.

a) 0.2
b) $\frac{1}{13}$
c) 25%
d) 50%

Bibliografía

Bibliografía para el alumno

Alarcón, J. y Barrón, H., *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio y lecturas*, SEP, México, 2001.

Allen, J., *El hombre anumérico*, Tusquets, Barcelona, 2014.

Allen, J., *La vida es matemática*, Booket, Barcelona, 2017.

Almira, J. M., Fourier. *Un debate acalorado*, Nivola, Madrid, 2014. (La matemática en sus personajes)

Ávila, A. y García, S., *Los decimales: más que una escritura. Materiales para apoyar la práctica educativa*, SEP, México, 2008.

Baldor, A., *Álgebra*, Grupo Editorial Patria, México, 2017.

Baldor, A., *Aritmética*, Grupo Editorial Patria, México, 2017.

Bárcenas, S., Matemáticas 2, SM, México, 2016.

Bell, E. T., *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1985.

Berlanga, R., *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003. (La ciencia para todos)

Bracho, J. *¿En qué espacio vivimos?*, Fondo de Cultura Económica, México, 1989.. (La ciencia para todos)

Bracho, J., *Introducción analítica a las geometrías*, Fondo de Cultura Económica, México, 2009.

Braun, E., *Caos, fractales y cosa raras*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003. (La ciencia para todos)

Capó, M., *El país de las mates. Cien problemas de ingenio 1*, AGT Editor, México, 2008.

Capó, M., *El país de las mates. Cien problemas de ingenio 2*, AGT Editor, México, 2008.

Capó, M., *El país de las mates. Cien problemas de ingenio 3*, AGT Editor, México, 2008.

Capó, M., *El país de las mates. Cien problemas de ingenio 4*, AGT Editor, México, 2008.

Carroll, L., *Matemática demente*, Austral, Madrid, 2004.

Chaitin, G., *El número omega. Límites y enigmas de las matemáticas*, Tusquets, Barcelona, 2004. (Metatemas)

Chica, A., *Descartes. Geometría y método*, Nivola, Madrid, 2001. (AGT-Nivola)

Collette, J.-P., *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI editores, México, 2003.

Coto, G., *Matemáticas, trucos y estrategias para ejercitar tu mente*, ST, 2011.

Cruz, T., *Álgebra con aritmética: un enfoque moderno*, EDIMAF, México, 1999.

De la Peña, J. A., *Álgebra en todas partes*, Fondo de Cultura Económica, México, 1999. (La ciencia para todos)

De León, M. *La engañosa sencillez de los triángulos*, La catarata, España, 2017.

De Lorenzo, J., Poincare. *Matemático visionario, politécnico escéptico*, Nivola, Madrid, 2007. (La matemática en sus personajes)

Durán, A., *Crónicas matemáticas*, Crítica, Barcelona, 2018.

Everett, C., *Los números nos hicieron como somos*, Crítica, Barcelona, 2014.

Fixx, J., *Retos para muy inteligentes*, Salvat, Barcelona, 2018.

G. Peña, Silvia y L. Escudero, Olga Leticia, *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa*, INEE, México, 2008.

Gálvez, P., *Hypatia. La mujer que amó la ciencia*, Lumen, Barcelona, 2004.

García, S., *Un número perfecto*, Anaya, España, 2017.

Gardner, M., *Acertijos matemáticos*, Diana, México, 2000.

Gardner, M, *Los enigmas del robot Farfel*, Salvat, Barcelona, 2018.

Goodson, C. y Miertschin, S., *Álgebra con aplicaciones técnicas*, Limusa, México, 1991.

Guedj, D., *El teorema del loro*, Anagrama, España, 2005.

Guijarro, J., *Lie. Más allá de la geometría*, Nivola, Madrid, 2007. (La matemática en sus personajes)

Gurkewitz, R. y Arnstein, B., 3-D *Geometric Origami*, Dover, Estados Unidos, 1995.

Hersh, R. y John-Steiner, V., *Matemáticas: una historia de amor y odio*, Crítica, Barcelona, 2017.

Iagar, R., *Matemáticas y ajedrez*, La catarata, España, 2017.

Illanes, A. *La caprichosa forma de Globión*, Fondo de Cultura Económica, México, 1999. (La ciencia para todos)

Kaplan, R., *Una historia natural del cero. La nada que existe*, Océano, México, 2004.

Kostovski, A., *Construcciones geométricas mediante un compás*, MIR, Moscú, 1984. (Lecciones populares de matemáticas)

Moise, E. y Downs, F., *Geometría moderna*. Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1986.

Montejano, L., *La cara oculta de las esferas*, Fondo de Cultura Económica, México 1989. (La matemática en sus personajes)

Moreno, R., Omar Jayyam. *Poeta y matemático*, Nivola, Madrid, 2007. (La matemática en sus personajes)

Moreno, R., Plücker y Poncelet. *Dos modos de entender la geometría*, Nivola, Madrid, 2008. (La matemática en sus personajes)

Muñoz, N. *Matemágicas*, Norma, México, 2001.

Noguez, S. et al., *Activación del pensamiento 2: actividades para el desarrollo de habilidades cognitivas*, Santillana, México, 2001.

Pardo, V., Lagrange. *La elegancia matemática*, Nivola, Madrid, 2003. (La matemática en sus personajes)

Perelman, Y. I., *Matemáticas recreativas*, Ediciones de Cultura Popular, México, 1985.

Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965.

Prieto, C., *Sarando vuelve al país de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 2012. (La matemática en sus personajes)

Robles, D., *Los cien mejores acertijos matemáticos*, Fernández editores, México, 1995.

Sánchez, C. Y Valdés, C., Kolmogórov. *El zar del azar*, Nivola, Madrid, 2003. (La matemática en sus personajes)

Sánchez, O., *Probabilidad y estadística*, McGraw-Hill México, 2000.

Shilov, G., Gama simple, *¿cómo construir las gráficas?*, MIR, Moscú, 1984. (Lecciones populares de matemáticas)

Singh, S., *El enigma de Fermat*, Ariel, Barcelona, 2015.

Singh, S. *Los Simpson y las matemáticas*, Planeta, Barcelona, 2013.

Solé, R., *La lógica de los monstruos*, Tusquets, Barcelona, 2017.

Stachel, J. *Einstein: un año milagroso*, Crítica, Barcelona, 2001.

Stewart, I., *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, Crítica, Barcelona, 2013.

Stewart, I., *Baúl de tesoros matemáticos*, Crítica, Barcelona, 2010.

Stewart, I., *Cartas a una joven matemática*, Crítica, Barcelona, 2006.

Stewart, I., *El laberinto mágico*, Crítica, Barcelona, 2011.

Struik, D. J., *Historia concisa de las matemáticas*, SEP, México, 1990.

Taham, M., *El hombre que calculaba*, Noriega Editores, México, 1994.

Talanquer, V., *Fractus, fracta, fractal*, Fondo de Cultura Económica, México, 2002.

Tegmark, M., *Nuestro universo matemático*, Antoni Bosch, España, 2015.

Torija, R., Arquímedes. *Alrededor del círculo*, Nivola, Madrid, 2003. (La matemática en sus personajes)

Ursini, S. *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas. México, 2005.

VanCleave, J., *Matemáticas para niños y jóvenes*, Limusa, México, 1997.

VV. AA. *Antología de matemáticas,* UNAM, México, 1971.

VV. AA., *La ciencia platicadita*, Lectorum, México, 2008.

Bibliografía para el docente

Abbott, E., *Planilandia*, Createspace ind. Publishing Platform, Londres, 2016.

Amster, P. y Pinasco, J., *Teoría de juegos. Una introducción matemática a la toma de decisiones*, Fondo de Cultura Económica, México, 2014.

Courant, R. y Robbins, H., *¿Qué son las matemáticas?,* Fondo de Cultura Económica, México, 2005.

De la Peña, J. A., *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, Siglo XXI, México, 2002.

García, A. *et al.*, *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, Síntesis, Madrid, 1995.

Kline, M., *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, Fondo de Cultura Económica, México, 1992.

Pereda, Luis., *Didáctica de la resolución de problemas*, Desclee de Brouwer, Bilbao, 1987.

Piaget, J. *et al.*, *Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En: la enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, Madrid, 1965.

Ramírez, M. *et al.*, *Sugerencias didácticas para el desarrollo de competencias en secundaria*, Trillas, México, 2006.

Santos, L. M., *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, Trillas, México, 2007.

Titchmarsh, E., *Esquema de la matemática actual*, Fondo de Cultura Económica, México, 1951.

Vygotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Crítica. Barcelona, 2003.

Sugerencias

Referencias Libros del Rincón

Bosch, C., *El billar no es de vagos. Ciencia, juego y diversión*, SEP/Fondo de cultura económica, México, 2016.

Guedj, D., *El imperio de los números*, SEP /Art Blume: Distribuidora Marín, México, 2012.

Enzensberger, H., *El diablo de los número*. Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas, SEP/Ediciones Siruela, México, 2016.

Jiménez, D., *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, SEP /Tajamar editores, México, 2016.

Lam, E., *El álgebra es divertida*, SEP /Santillana, México, 2009.

Potter, L., *A Jugar con las matemáticas*, SEP /Hiperlibro: Ediciones Robinbook, México, 2015.

Referencias electrónicas para el alumno

Abreu, J. L. Proyecto Arquímedes. Recursos de geometría.
http://arquimedes.matem.unam.mx/
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Ciencia y desarrollo. Conacyt.
https://www.conacyt.gob.mx/index.php/comunicacion/publicaciones-conacyt/revista-ciencia-y-desarrollo
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Cienciorama. Red de divulgación. UNAM.
http://www.cienciorama.unam.mx/
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

¿Cómo ves? Revista de divulgación de la ciencia. UNAM.
http://www.comoves.unam.mx/
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Cuéntame. Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi).
http://cuentame.inegi.org.mx/
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Eduteka. Materiales para el uso de TICS.
http://eduteka.icesi.edu.co/
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Gaussianos. Blog de divulgación de las matemáticas.
https://www.gaussianos.com/category/matematicos/
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Geogebra. Geometría dinámica. Software.
http://www.geogebra.org
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

ILCE. Biblioteca digital.
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/menu.htm
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Matemáticas divertidas. Juegos flash.
http://www.matematicasdivertidas.com/Zonaflash/zonaflash.html
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Olimpiada de matemáticas de la Academia Mexicana de Ciencias. Concurso de primavera.
http://amc.edu.mx/amc/index.php?option=com_content&view=article&id=82&Itemid=319
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Canguro matemático.
http://www.ommenlinea.org/actividades/concursos/canguro-matematico/
(Fecha de consulata: 21 de junio de 2018)

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Folletos con ejercicios introductorios.
http://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/
(Fecha de consulta: 21 de junio de 2018)

Proyecto Gauss. Ministerio de Educación de España. Recursos para el uso de applets de Geogebra.
http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Red Escolar del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE).
http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Referencias electrónicas para el docente

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).
http://www.inee.edu.mx/index.php/sala-deprensa/notas-informativas/3153-evaluaciones-inee-sep-2018
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Ministerio de Educación de España. Recursos de nivel secundaria.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/index.html
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

Nuevo modelo educativo. SEP.
https://www.gob.mx/sep/documentos/nuevo-modelo-educativo-99339
(Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)